Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

Факультет
Специального машиностроения

Кафедра
Специальная робототехника и мехатроника

Лесков А.Г.

МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ РОБОТЫ

Конспект лекций по курсу
«ОСНОВЫ РОБОТОТЕХНИКИ»

г.Москва
2018 г

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Робот – машина с человекоподобным поведением, которая частично или полностью выполняет функции человека при его взаимодействии с внешним миром (БСЭ)

Манипуляционный робот (МР), *робот-манипулятор, (Robotic Arm, Manipulate System)* – робот, выполяющий действия, подобные (в некотором смысле) тем, которые совершает человек при работе рукой (руками).

Аналогия с человеком не всегда полная. Мы будем рассматривать подобие в смысле выполняемых МР действий по захвату, переносу, установке объектов, работе с различными инструментами и приборами т.д., в том числе, с использованием информационных систем, оценки обстановки, принятия решений и планирования действий по их осуществлению и т.д.

При этом подобие не обязательтно будет относиться к объему рабочей зоны и кинематическому подобию рабочих органов (руки человека и манипуляторы МР).

Примеры объектов, корторые охватывает изучаемый предмет – это промышленные МР, МР для работы в экстремальных средах, МР мобильных робототехнических комплексов, бортовые манипуляторы космических транспортных систем и МР орбитальных космических станций, манипуляторы подводных аппаратов и др.

МР состоит из двух основных частей: Манипулятор и СУ манипулятором (СУМ).

Манипулятор («механическая рука МР») - рабочий орган МР – мехатронная система, преобразующая сигналы управления СУМ в механические перемещения рабочего органа манипулятора, а также установленного на манипуляторе оборудования.

Рабочий орган манипулятора – устройство для захватывания и удержания объектов манипулирования (полезных грузов, инструментов и т.д.). Другие названия – схват, захватное устройство манипулятора (ЗУМ), End Effector (EE).

Установленное оборудование (навесное оборудование) – приборы и устройства (телекамеры, светильники, СТЗ, дальномеры и т.д.), размещенные на манипуляторе.

В составе оборудования, установленного на манипуляторе мы будем выделять ***Средства очувствления*** – системы технического зрения, датчики сил и моментов взаимодействия с внешней средой, тактильные датчики, ультразвуковые датчики, дальномеры, сканеры.

Средства очувствления служат для контроля работы МР. В современных МР сигналы средств очувствления используются и при управлении МР,

Система управления манипулятором – устройство, формирующее сигналы управления манипулятором в функции от целевых установок (заданий), формируемых человеком-оператором, и информации о состоянии МР и внешней среды.

В составе СУМ – средства человеко-машинного интерфейса.

Манипулятор включает три подсистемы:

Исполнительный механизм манипулятора, рабочий орган – ЗУМ, и систему приводов манипулятора.

Вообще, ***механизм*** – это совокупность взаимосвязанных твёрдых тел, предназначенная для преобразования входов на одном или нескольких твёрдых телах в выходы на других твёрдых телах. Механизм совершает преобразование движений одних звеньев в движение других звеньев.

Звенья – это твёрдые тела, из которых образуется механизм. При этом имеются в виду как абсолютно твёрдые тела, так и деформируемые и гибкие тела. Звеном может быть одна деталь, либо несколько деталей, соединённых в одну неизменяемую систему.

Исполнительный механизм манипулятора (ИМ) – механизм, преобразующий движение входящих в его состав отдельных звеньев в движение ЗУМ.

Конструктивно ИМ состоит из нескольких тел (звеньев), связанных попарно.

Смежные звенья ИМ образуют *кинематические пары*.

Вообще, ***кинематической парой*** (сокращеннно, парой, в дальнейшем - КП) называют подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев. Всякая кинематическая пара ограничивает *относительное* движение соединяемых звеньев.

Кинематические пары принято классифицировать по числу степеней свободы, которое утрачивают соединяемые тела в относителном движении, при их соединении. В этой связи кинематические пары подразделяют на 5 классов. При этом движение сопряженных парой $к$-го класса тел определяется $6-к$ обощенными координатами.

Отметим, что каждое из тел может образовывать кинематические пары с несколькими телами.

Тогда число степеней свободы в относительном движении двух тел, сропряженных кинематической парой S-го класса равно

$n = 6-S$.

Два свободных тела образуют кинематическую пару 0-го класса. Два соприкасающихся тела образуют кинематическую пару 5-го класса, если в относительном движении эти тела имеют 1 степень свободы. Примерами КП 5-го класса служат вращательная (относительное движение тел – вращение вдоль одной оси), поступательная (относительное движение тел – линейное перемещение вдоль одной оси) и винтовая (одновременное взаимозависимое линейное перемещение и вращение вокруг одной и той же оси) пары.

В манипуляционных роботах применяются ИМ, включающие, в основном, кинематические пары 5-го класса – вращательные и поступательные. Отметим, что многие кинематические пары более высокого класса можно представить состоящими из нескольких кинематических пар 5-го класса.

Вращательные КП 5-го класса часто называют ***шарнирами***.

В робототехнике наряду для обозначения КП 5-го класса часто применяется термин ***сочленение (joint)***.

Звено ИМ – отдельное твёрдое тело, входящее в состав ИМ. Исходя из определения звена ИМ как твёрдого тела следует, что это – фрагмент ИМ, заключенный между кинематическими парами, образованными соединением этого фрагмента с другими звеньями ИМ. Англоязычный аналог понятия звено – ***body***.

Совокупность звеньев ИМ, связанных в кинематические пары – это ***кинематическая цепь ИМ.***

Вообще, ***кинематическая цепь (КЦ)*** – это система звеньев, образующих между собой кинематичсеские пары.

Кинематические цепи бывают простыми и сложными.

Простой (линейной) кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

Сложной (разветвлённой) КЦ называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематичесkуие пары.

КЦ делятся на ***разомкнцутые и замкнутые***.

Простая разомкнутая КЦ – простая КЦ, у которой есть звенья, входящие только в одну КП.

Простая замкнутая КЦ – простая КЦ, у которой каждое звено входит в две КП.

Сложная разомкнутая КЦ – такая сложная КЦ, в которой имеются звенья, входящие в одну КП.

Сложная замкнутая КЦ – такая сложная КЦ, в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две КП.

Пример *простой разомкнутой* КЦ ИМ - манипулятор, перемещающийся в свободном пространстве. Его последнее звено образует кинематическую пару только с одним, предыдущим звеном.

Пример *простой замкнутой* КЦ ИМ – манипулятор, выполняющий контактную операцию. Все звенья МР, включая последнее, входят в состав двух кинематических пар.

Для механизмов используют понятия ***кинематической и структурной схем***.

Структурная схема (структура) – условное графическое изображение механизма, схематически отображающее его функционирование, включающее условные изображения звеньев и КП без указания их размеров.

Кинематическая схема – чертеж механизма, отображающий его функционирование, включающий приближенное к реальному изображение конструкции звеньев и КП с указанием их размеров.

В робототехнике понятия кинематической и структурной схем часто отождествляются и применяются для схематического изображения кинематической цепи.

Используя введенные понятия (звено, кинематическая цепь), можно дать определение механизма, опирающееся на его структуру.

Механизм – это кинематическая цепь, в состав которой входит неподвижное звено (стойка) и число степеней свободы которой равно числу обощённых кординат, характеризующих положение цепи относительно стойки.

Движение звеньев механизма рассматривается по отношению к неподвижному звену – стойке.

Механизм называется ***плоским***, если все его подвижные точки движутся в параллельных плоскостях.

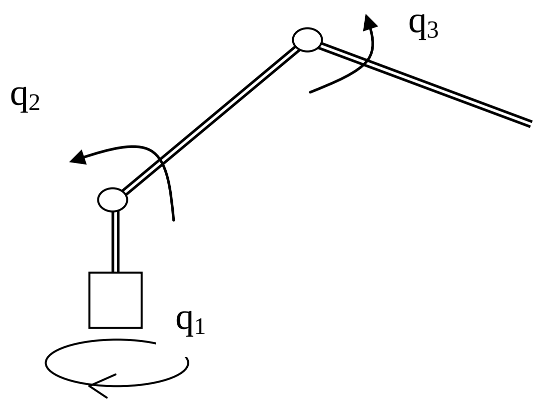
Пространственным называется механизм, подвижные точки которого описывают неплоские траектории или траектории, лежащие на пересекающихся плоскостях.

ИМ МР, как правило, – пространственные механизмы.

Степень свободы – характеристика, определяющая возможность одного независимого перемещения.

Число степеней свободы – число независимых между собой возможных перемещений механической системы.

Степень подвижности механизма – число обобщенных координат механизма.



Пример структурной (кинематической) схемы (ИМ).

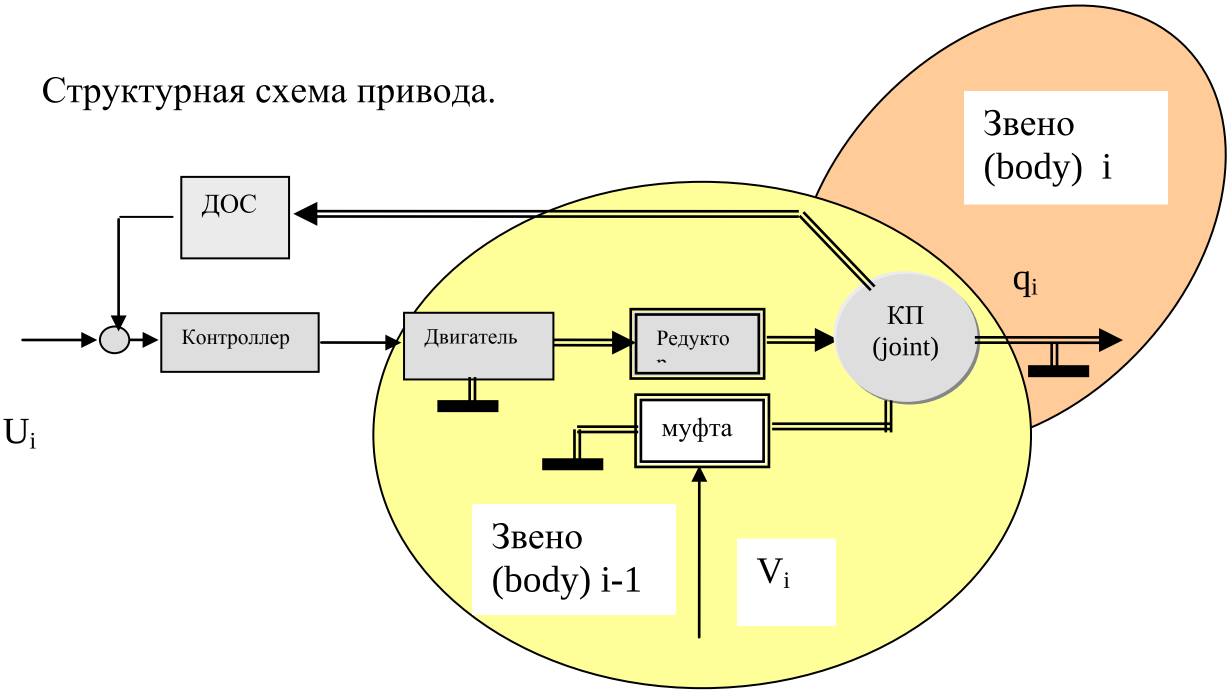
Перемещения отдельных звеньев ИМ осуществляются с помощью ***приводов***.

Приводы МР – мехатронные системы.

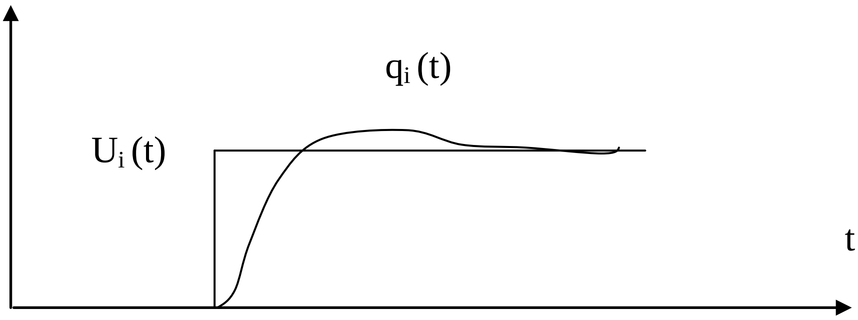
Приводы МР осуществляют проеобразование (как правило, электрических) сигналов управления на их (приводов) входах в механические перемещения ИМ и, как следствие, ЗУМ манипулятора.

В составе приводов – (контроллеры, УПУ /силовая электроника/, двигатели, редукторы (МПД).

Структурная схема привода.



Одинарные стрелки – электрические сигналы. Двойные – механические перемещения.



Функционально приводы манипуляторов чаще всего являются *следящими* (СП), т.е. используют в основе своей работы разности между прикладываемыми извне управляющими воздействиями, соответствующих требуемым значениям выходных координат, и реальними значениями координат, формируемыми на сонове показаний датчиков сигналов обратных связей.

Следящие приводы – обязательные компоненты МР для работы в экстремальных средах, МР специального назначения, большинства промышленных роботов.

МР чаще всего устроены так, что один привод осуществляет относительное перемещение только смежных звеньев и только относительно одной оси ИМ (КП кинематически не связаны). Однако есть примеры ИМ, у которых перемещения отдельных КП взаимосвязаны (дифференциальные механизмвы передачи движения).

Суммарные перемещения ИМ происходят в результате работы всех приводов.

Манипулятор в целом осуществляет преобразование с помощью системы приводов сигналы управления на их (приводах) входах в механические перемещения рабочего органа манипулятора; благодаря приводам манипулятор перемещается в пространстве и взаимодействует с объектами.

Сигналы управления на входах приводов формирует <u>система управления манипулятором.</u>

В общем случае СУ манипулятором включает две системы ТСУ и ССУ.

Тактический уровень (СУ тактического уровня - ТСУ) – обеспечивает формирование сигналов управления манипулятором МР; здесь происходит преобразование сигналов управления движением ЗУМ, в сигналы управления приводами. ТСУ часто называют системой управления движением МР.

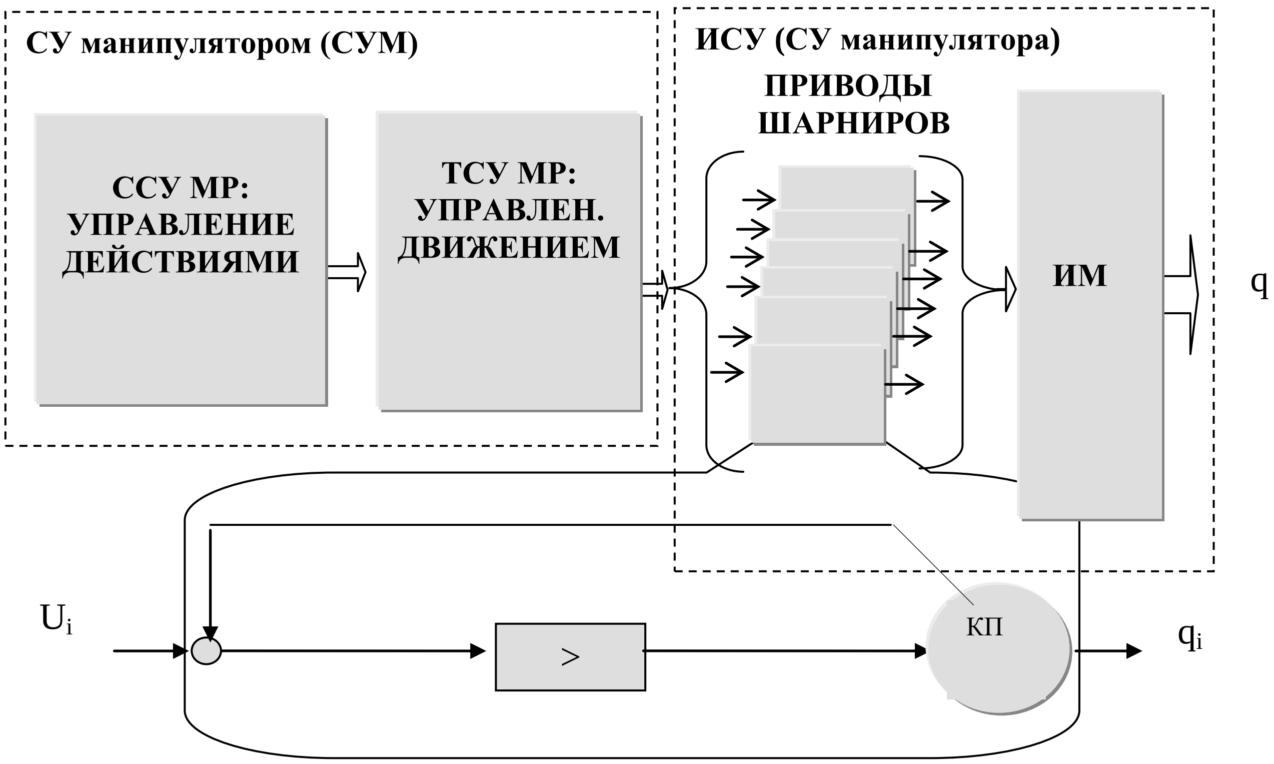
Стратегический уровень (СУ стратегического уровня - ССУ) – обеспечивает функционирование МР соответственно заданных целевых установок. На этом уровне обеспечивается формирование команд управления движением МР в пространстве, которые реализуются в ТСУ. ТСУ часто называют системой управления действиями МР.

Отметим, что манипулятор также имеет систему управления /СУ манипулятора/ = это комплекс средств управления (контроллеры), реализованных непосредственно в приводах шарниров. Для МР СУ манипулятора является исполнительной системой - ИСУ. С ее помощью обеспечивается преобразование сигналов управления ТСУ (сигналы управления приводами) – в механические перемещения шарниров и, соответственно – в перемещение манипулятора МР в пространстве.

МАНИПУЛЯЦИОННЫЙ РОБОТ:

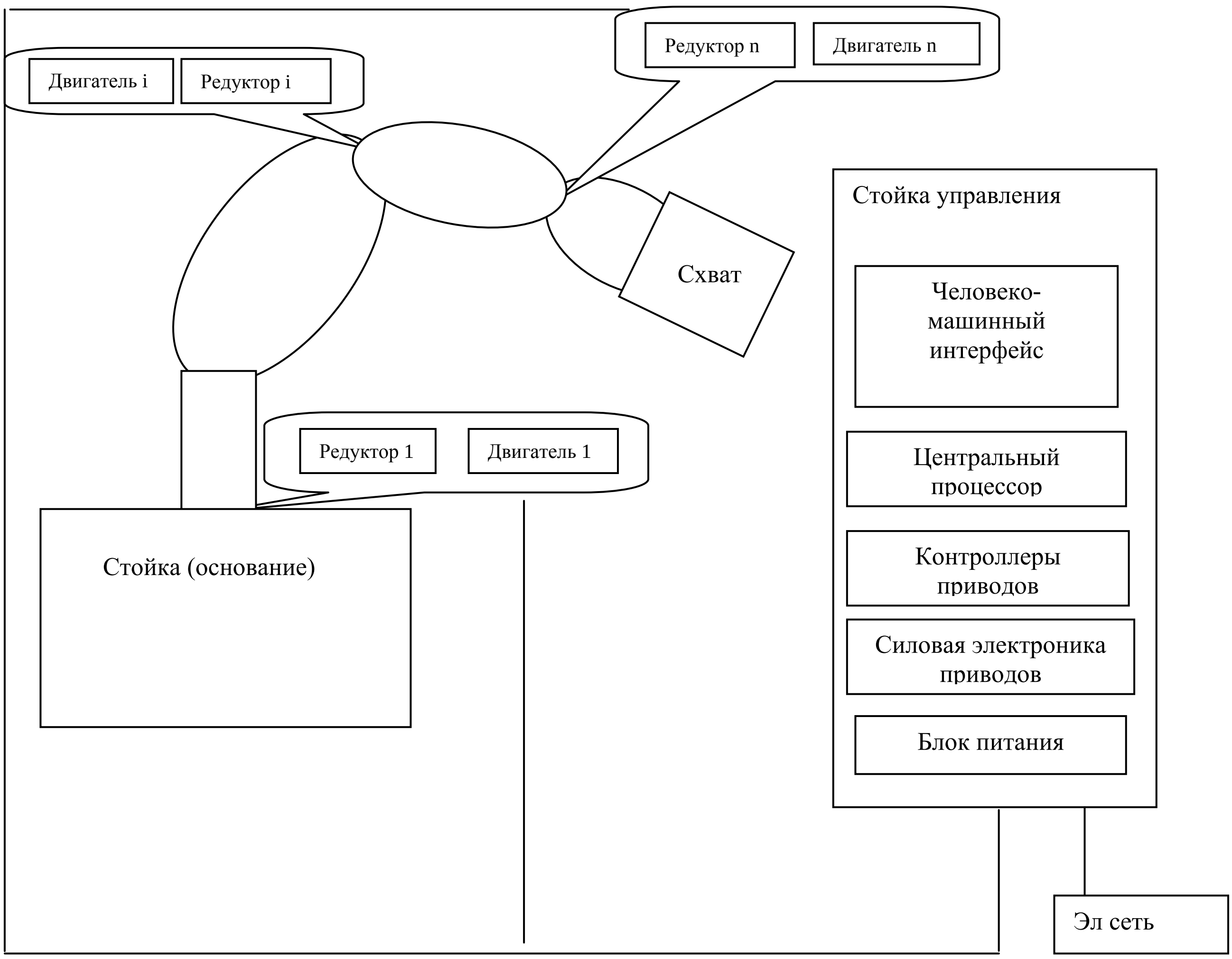
Манипулятор: +	СУ манипулятором:
ИМ+приводы /Исполнительная система/	Управление движением+ управление действиями /СУ тактического уровня + СУ стратегич. уровня/

Общее управление МР строится по иерархическому принципу = ССУ – ТСУ – ИСУ. Высшим является ССУ, низшим – исполнительным – ИСУ.



Управление МР на всех уровнях осуществляется с использованием сигналов от датчиков информации (телевизионные, силомоментные, тактильные, ультразвуковые и т.д.) и средств человеко-машинного интерфейса.

ПРИМЕР: КМР ERA – ИСУ = ИМ+ЕЕ+система приводов;
ТСУ - управление свободным движением манипулятора, его самонаведение, движение в контакте; ССУ – управление действиями (Автосеквенции). В ERA деятельность планируется заранее (Off-line) с помощью специальной системы MPTE. Деятельность реализуется в виде последовательности элементарных операций – акций (команд).
Одна команда – одно действие. Содержание этого действия – элементарное перемещение, или др. операция.
Пример миссии (задачи, акции) ERA.
Примеры акций.



РАЗДЕЛ 1. КИНЕМАТИКА ИМ МР

1. Координаты и параметры ИМ

1.1. Описание ИМ МР

ИМ – многозвенный пространственный механизм. Звенья (тела – bodies) ИМ последовательно связаны между собой (образуют КП) таким образом, что образуют открытую (незамкнутую) линейную кинематическую цепь. Звенья ИМ – твердые тела. Каждая КП допускает относительное вращение или относительное линейное перемещение смежных звеньев в направлении только одной оси (шарнир «вращательного» типа – ВШ, вращательная кинематическая пара – ВП или шарнир «поступательного» типа – ПШ, поступательная кинематическая пара – ПП, соответственно). Первое звено ИМ связано с неподвижным основанием. Все звенья ИМ нумеруются, начиная от основания. Основанию ИМ присваивается номер 0.

1.2. Системы координат

С каждым из звеньев ИМ связывается правая прямоугольная (ортогональная) СК так, как показано на рис.1.1. $СК_i$ связана со звеном i. Ось Z_{i-1} $СК_{i-1}$ совмещается с осью i-го сочленения. Начало $СК_{i-1}$ – <u>в центре</u> i-го сочленения. Оси X_{i-1} и Y_{i-1} направляются так, как удобнее. Целесообразно одну из этих осей направить вдоль звена i-1, а другую – в поперечном направлении. Ось Z_n $СК_n$ обычно направляют вдоль последнего звена, на котором размещено захватное устройство манипулятора (ЗУМ) в сторону рабочей зоны. Начало $СК_n$ обычно размещают в центре ЗУМ. Ось X_n – в поперечном направалении (по движению губок схвата). $СК_0$ связывается с неподвижным основанием. Эта система координат в дальнейшем полагается инерциальной и называется «базовой».

1.3. Координаты шарниров

- θ_i - угол поворота звена i относительно звена i-1 вокруг оси Z_{i-1}, если i = [ВП] (рис. 1.2);
- s_i - линейное перемещение звена i относительно звена i-1 вдоль оси Z_{i-1}, если i = [ПП].

Замечание:
- "i = [ВП]" следует читать "сочленение i – вращательного типа»,
- "i = [ПП]" следует читать "сочленение i – поступательного типа»,

i = 1,2,…,n.

Нулевые координаты сочленений соответствуют положению ИМ, которое принимается за исходное.

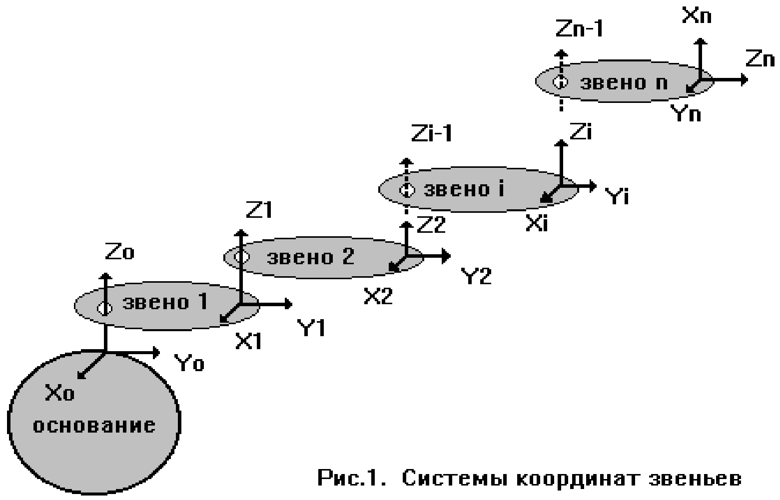


Рис.1. Системы координат звеньев

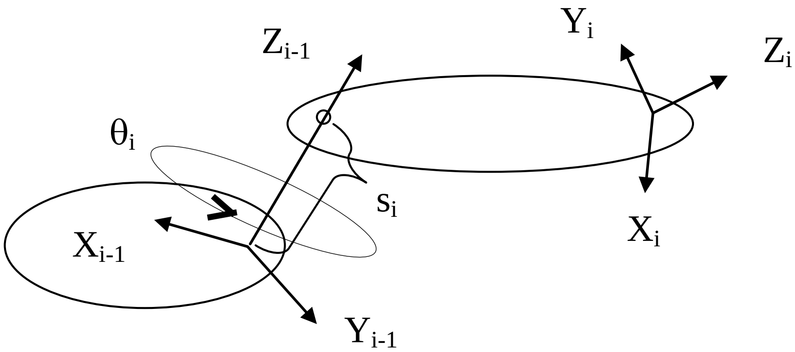


Рис.1.2. Координаты сочленений ИМ

1.4. Параметры ИМ

1.4.1. Параметры кинематической схемы.

- n – число звеньев ИМ,
- $\sigma = \{\sigma_i\}$ - вектор (nх1) индикаторов типов σ_i сочленений,

в котором ($\sigma_i = 1$, если i-й шарнир – ВШ (ВП) и $\sigma_i = 0$, если i-е сочленение – ПШ (ПП)); $i = 1,2,\ldots,n$.

1.4.2. Конструктивные (геометрические) параметры звеньев ИМ (рис.1.3).

- Углы установки осей СК смежных звеньев α_i, β_i, γ_i – три угла, на которые следует повернуть $СК_{i-1}$ последовательно вокруг осей X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}, так, чтобы оси $СК_{i-1}$ стали параллельны соответствующим осям $СК_i$ при значении $\theta_i = 0$ (в исходном положении i-го сочленения); $i = 1,2,\ldots,n$.

- Длина звена i – вектор $\mathbf{l_i}$, проведенный из начала $СК_{i-1}$ к началу $СК_i$ при значении $s_i = 0$ (в исходном положении i-го сочленения); вектор $\mathbf{l_i}$ задается в проекциях на оси $СК_i$: $l_i^{(i)} = \{ l_{ix}\ l_{iy}\ l_{iz} \}^T$;

i = 1,2,…,n.

Здесь и далее мы будем использовать верхний и нижний индексы для указания номера вектора (нижний индекс) и системы координат, в которой он задан (верхний индекс в скобках). Если верхний и нижний индексы совпадают, используем только нижний индекс.

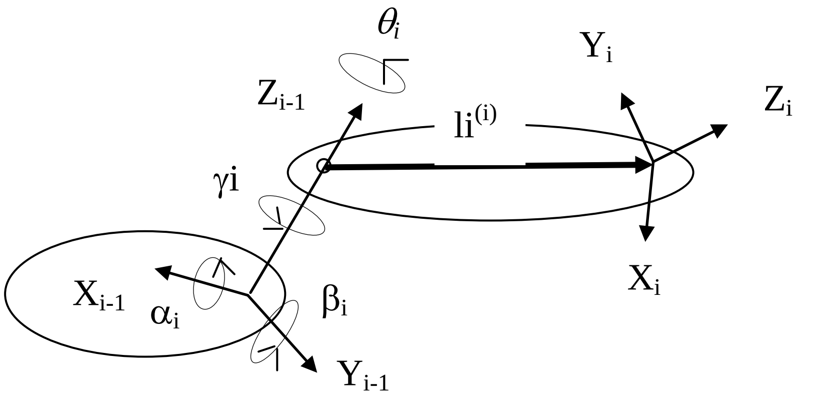


Рис.1.3. Конструктивные параметры ИМ

Пояснение. Отсчет углов установки шарниров и длин звеньев производится при нулевых значениях координат сочленений !

1.5. Обобщенные координаты ИМ

Обозначаются q_i , i = 1,2,…,n и служат для определения взаимного расположения звеньев. Используют следующие обозначения:

- $q = \{q_i\}$ – вектор размера (nx1), в котором $q_i = \theta_i$, если i = [ВП], $q_i = s_i$, если i = [ПП]; i = 1,2,…,n.

Учет типа шарнира производится за счет множителя σ_i :

$$q_i = \sigma_i\theta_i + (1 - \sigma_i)\, s_i\ . \qquad (1.1)$$

$\sigma_i = 1$ [i = ВП],

$\sigma_i = 0$ [i = ПП],

θ_i отсчитывается при повороте звена i (относительно звена i-1) вокруг оси Z_{i-1}. Положительное значение θ_i соответствует повороту звена i в таком направлении, когда X_{i-1} -> Y_{i-1} при наблюдении с “конца” оси Z_{i-1}.

s_i отсчитывается при перемещении звена i (относительно звена i-1) вдоль оси Z_{i-1}. Положительное значение s_i соответствует перемещению звена i в направлении оси Z_{i-1}.

Из выражения (1.1) следует, что $\theta_i = \sigma_i q_i$, $s_i = (1 - \sigma_i)\, q_i$.

1.6. Матрицы поворота

При моделировании ИМ потребуется рассмотрение векторов в различных системах координат. Это связано с тем, что параметры звеньев ИМ задаются в связанных СК. Уравнения же движения ИМ составляются и рассматриваются в инерциальной (базовой) СК. Очевидно, в общем случае различные системы координет повернуты относительно друг друга. Поэтому координаты одного и того же вектора **a** в разных СК не будут совпадать (рис.1.5).

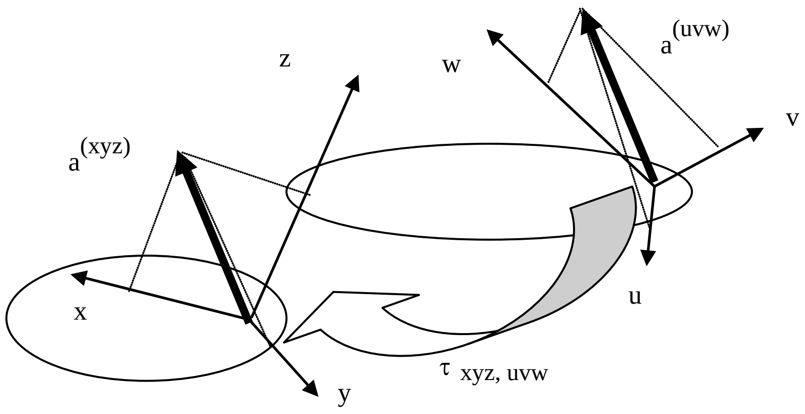
Пусть {0xyz} – некоторая СК. Пусть {0uvw} – некоторая другая СК. Будем считать, что СК {0uvw} образована в результате некоторого поворота, или нескольких поворотов СК {0uvw} относительно СК {0xyz} из положения, когда СК {0xyz} и СК {0uvw} совпадали.

СК {0xyz} и СК {0uvw} могут быть связаны с разными звеньями СК {0xyz} и СК {0uvw}, например, со смежными звеньями: i-1 и i. В этом случае при определении относительного расположения этих звеньев будет считаться, что именно звено i певорачивается относительно звена i-1, но не наоборот! Если СК{0xyz} связана со звеном номер 0, а СК {0uvw} – со звеном i, то рассматривается поворот звена i относительно стойки.

Связь между значениями координат вектора **a** в СК {uvw} и СК {xyz} устанавливает следующее соотношение

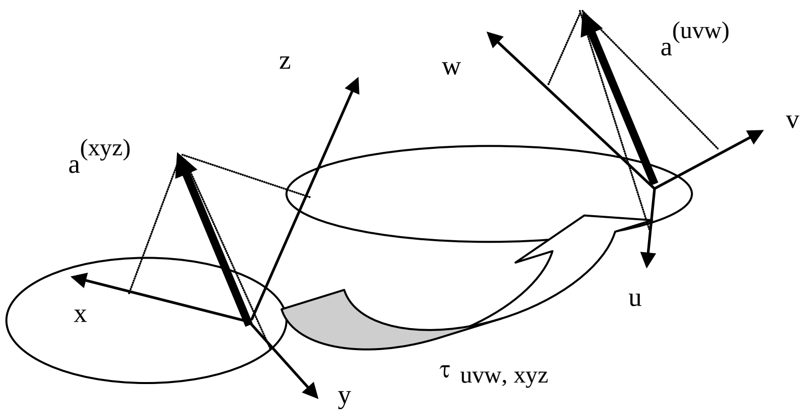
$$a^{(xyz)} = \tau_{xyz,\ uvw}\, a^{(uvw)},$$

где $\tau_{xyz,\ uvw}$ – матрица преобразования координат вектора, заданного в СК{uvw}, в систему координат СК{xyz}.



Звено с СК XYZ неподвижно, звено с СК UVW – подвижно. Вектор $a^{(uvw)}$ и $a^{(xyz)}$ подвижен. Координаты вектора $a^{(uvw)}$ = const Координаты вектора $a^{(xyz)}$ = var.

τ xyz, uvw - матрица поворота СК UVW относительно СК XYZ



Звено с СК XYZ неподвижно, звено с СК UVW – подвижно. Вектор $a^{(xyz)}$ неподвижен. Координаты вектора $a^{(uvw)}$ = var. Координаты вектора $a^{(xyz)}$ = const.

Рис. 1.5. Координаты вектора **a** в СК {xyz} и СК {uvw}.

Получим формулы для расчета матриц преобразования $\tau_{xyz,\ uvw}$.
Вектор $a^{(xyz)}$ можно представить в следующем виде

$$a^{(xyz)} = a_x\, i_x + a_y\, j_y + a_z\, k_z\,.$$

Этот же вектор можно записать так

$$a^{(uvw)} = a_u\, i_u + a_v\, j_v + a_w\, k_w\,.$$

где
a_x, a_y, a_z - проекции вектора $a^{(xyz)}$ на оси x, y, z ,
i_x, j_y, k_z - орты осей СК {xyz},
a_u, a_v, a_w - проекции вектора $a^{(uvw)}$ на оси u, v, w,
i_u, j_v, k_w - орты осей СК {u v w}.

Очевидно, что

$$a_x = i_x\,(a_u\, i_u + a_v\, j_v + a_w\, k_w)$$
$$a_y = j_y\,(a_u\, i_u + a_v\, j_v + a_w\, k_w)$$
$$a_z = k_z\,(a_u\, i_u + a_v\, j_v + a_w\, k_w)$$

или

$$|\, a_x\, a_y\, a_z\,|^T = \begin{vmatrix} i_u\, i_x & j_v\, i_x & k_w\, i_x \\ i_u\, j_y & j_v\, j_y & k_w\, j_y \\ i_u\, k_z & j_v\, k_z & k_w\, k_z \end{vmatrix} \;|\, a_u\, a_v\, a_w\,|^T = \tau_{xyz\ ,\ uvw}\ |\, a_u\, a_v\, a_w\,|^T.$$

Матрицы $\tau_{xyz,uvw}$ устанавливают соответствие между координатами <u>одного и того же</u> вектора **a**, но <u>в различных</u> СК. Из последнего выражения видно, что столбцы матрицы преобразования $\tau_{xyz,uvw}$ есть проекции ортов i_u, j_v, k_w СК (uvw) на оси СК (xyz). Таким образом, столбцы этой матрицы определяют новые координаты ортов i_u, j_v, k_w повернутой СК (uvw) в исходной СК (xyz) после поворота СК (uvw) относительно СК СК (xyz). Поэтому матрицу $\tau_{xyz,uvw}$ можно рассматривать как оператор поворота системы координат СК (uvw) относительно СК (xyz).

Пусть, как и прежде, в исходном положении СК (uvw) и СК (xyz) совпадают. Тогда координаты некоторого вектора **a** относительно СК (xyz), т.е. $a^{(xyz)}$ и СК (uvw), т.е. $a^{(uvw)}$, также совпадают. Пусть вектор $a^{(uvw)}$ связан с СК (uvw). Как это было показано выше, оператор $\tau_{xyz,uvw}$ осуществляет поворот СК (uvw) относительно СК (xyz). Тогда вектор $a^{(uvw)}$ повернется вместе с СК (uvw). После такого поворота координаты вектора относительно СК (xyz) приобретут новые значения $a^{(xyz)}$, т.е. это будут уже координаты <u>повернутого</u> вектора. В этом смысле матрицу $\tau_{xyz,uvw}$ можно рассматривать как оператор поворота СК (uvw) вместе со связанным с ней вектором. Обращаясь к рис. 5, отметим, что в случае преобразования с матрицей $\tau_{xyz,uvw}$ вектор **a** изображен в положении после поворота.

Такми образом, матрицы $\tau_{xyz,uvw}$ - операторы поворота СК (СК (uvw) относительно СК (xyz)) и связанных с ней, т.е. с СК (uvw), векторов.

В дальнейшем эти матрицы мы будем называть матрицами поворота.

Обратные преобразования устанавливаются из рассмотрения аналогичных соотношений, а именно:

$$a_u = i_u (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z),$$
$$a_v = j_v (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z),$$
$$a_w = k_w (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z)$$

или

$$| a_u\ a_v\ a_w |^T = \begin{vmatrix} i_u\ i_x & i_u\ j_y & i_u\ k_z \\ j_v\ i_x & j_v\ j_y & j_v\ k_z \\ k_w\ i_x & k_w\ j_y & k_w\ k_z \end{vmatrix} | a_x\ a_y\ a_z |^T = \tau_{uvw\ ,\ xyz} | a_x\ a_y\ a_z |^T.$$

Из сравнения двух последних равенств следует, что

$$\tau_{uvw\ ,\ xyz} = \tau^{-1}_{xyz\ ,\ uvw} = \tau^{T}_{xyz\ ,\ uvw}$$

Матрица $\tau_{uvw,\ xyz}$ преобразует координаты вектора, заданного в СК (xyz), в СК(uvw) при повороте системы координат СК(uvw) относительно СК (xyz). Отметим, что, как и прежде, рассматривается поворот именно СК(uvw) относительно СК (xyz), но не наоборот. При таком преобразовании вектор **a** остается <u>неподвижным</u>. Обращаясь к рис. 5, отметим, что в случае преобразования с матрицей $\tau_{xyz,uvw}$ вектор **a** связан с подвижной СК.

В силу того, что $\tau_{uvw,\ xyz}$ матрица ортогонального ортонормированного преобразования, $\det \tau_{uvw,\ xyz} = 1$. Именно +1, поскольку преобразование применяется по отношению к правым СК.

1.6.1. Матрицы поворота вокруг одной координатной оси (матрицы элементарных поворотов).

Получим выражения для расчета матриц поворота вокруг одной из осей.

А) поворот СК {uvw} вокруг оси x СК {xyz} (ось u СК {uvw}) на угол α (рис.1.6):

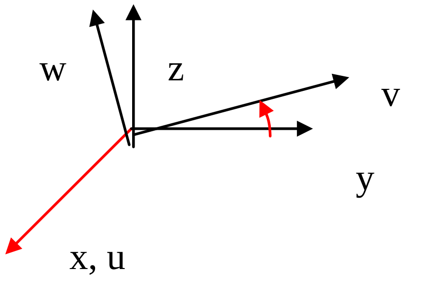


Рис.1.6. Поворот вокруг оси x

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\text{ось } x,\ \text{угол } \alpha) = \begin{vmatrix} i_u\ i_x & j_v\ i_x & k_w\, i_x \\ i_u\, j_y & j_v\, j_y & k_w\, j_y \\ i_u\ k_z & j_v\, k_z & k_w\, k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \tau_x(\alpha).$$

Матрица обратного преобразования имеет вид

$$\tau_{uvw,\,xyz}\ (\text{ось x, угол } \alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \tau_x^{T}(\alpha).$$

В дальнейшем матрицу $\tau_{uvw,xyz}$(ось x, угол α) для краткости будем записывать так

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\text{ось x, угол } \alpha) = \tau_x(\alpha);$$

Б) поворот СК {uvw} вокруг оси y СК {xyz} (ось v СК {uvw}) на угол β (Рис.1.7):

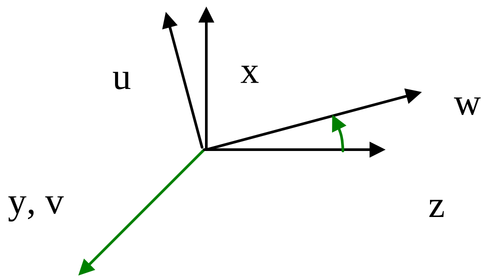


Рис.1.7. Поворот вокруг оси y

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\text{ось } y,\ \text{угол } \beta) = \begin{vmatrix} i_u\ i_x & j_v\ i_x & k_w\, i_x \\ i_u\, j_y & j_v\, j_y & k_w\, j_y \\ i_u\ k_z & j_v\, k_z & k_w\, k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix} = \tau_y(\beta).$$

Матрица обратного преобразования

$$\tau_{uvw,\,xyz,}\ (\text{ось y, угол } \beta) = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Для краткости матрице $\tau_{uvw,\,xyz,}$ (ось y, угол β) будем записывать в виде

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\text{ось y, угол } \beta) = \tau_y(\beta);$$

B) поворот СК {uvw} вокруг оси z СК {xyz} (ось w СК {uvw}) на угол ϒ (рис.1.8):

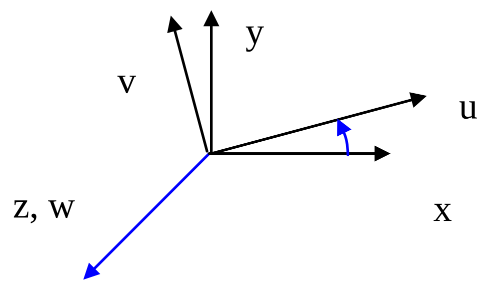


Рис.1.8. Поворот вокруг оси z

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\textit{ось z, угол } \gamma) = \begin{vmatrix} i_u\, i_x & j_v\, i_x & k_w\, i_x \\ i_u\, j_y & j_v\, j_y & k_w\, j_y \\ i_u\, k_z & j_v\, k_z & k_w\, k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tau_z(\gamma).$$

Матрица обратного преобразования

$$\tau_{uvw,\,xyz}\ (\text{ось z, угол } \gamma) = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для краткости матрицу $\tau_{uvw,\,xyz}$ (ось z, угол γ) будем записывать в виде

$$\tau_{xyz,\,uvw}\ (\text{ось z, угол } \gamma) = \tau_z(\gamma).$$

1.6.2. Матрицы композиции элементарных поворотов

Любой пространственный поворот СК можно представить как композицию трех элементарных поворотов. Так например, если СК {uvw} образована в результаты выполнения трех последовательных поворотов относительно СК {xyz}: вначале – вокруг оси x (новую СК обозначим {uv\`w\`}), затем (после первого поворота) – вокруг оси v\` (новую СК обозначим {u\`v\`w\`\`}), затем (после двух первых поворотов – вокруг оси w\`\` - СК {u\`\`v\`\`w\`\`}), то матрица композиции этих преобразований может быть получена путем перемножения матриц элементарных поворотов, так

$\tau_{xyz,\,uvw} = \tau_{xyz,\,uvw}$ (СК {uvw}, ось u, угол α) $\tau_{xyz,\,uvw}$ (СК {uvw}, ось v\`, угол β) $\tau_{xyz,\,uvw}$ (СК {uvw}, ось w\`\`, угол γ)

Отметим, что последовательность элементарных поворотов может быть различной (например: вначале v, затем u, затем w). Поэтому при определении матрицы композиции преобразований нужно указывать последовательность применения преобразований.

При написании последовательности операторов поворота учитываем, что осуществляются последовательные повороты СК {uvw} вместе с закреплённым с ней вектором относительно СК {xyz} в заданном порядке (ось u, ось v`, ось w``), но координаты векторов из СК {uvw} к СК {xyz} преобразуются в обратном порядке! Поэтому матрица первого поворота – самая первая слева (последнее преобразование вектора из СК {uvw} в СК {xyz}). Матрица последнего поворотоа – самая последняя слева (первое преобразование вектора из СК {uvw} в СК {xyz}).

Этот факт иллюстрирует рисунок 1.10. Зеленый цвет – последовательность поворотов СК. Синий – последовательность преобразований векторов, заданных координатами в подвижной СК, в неподвижную.

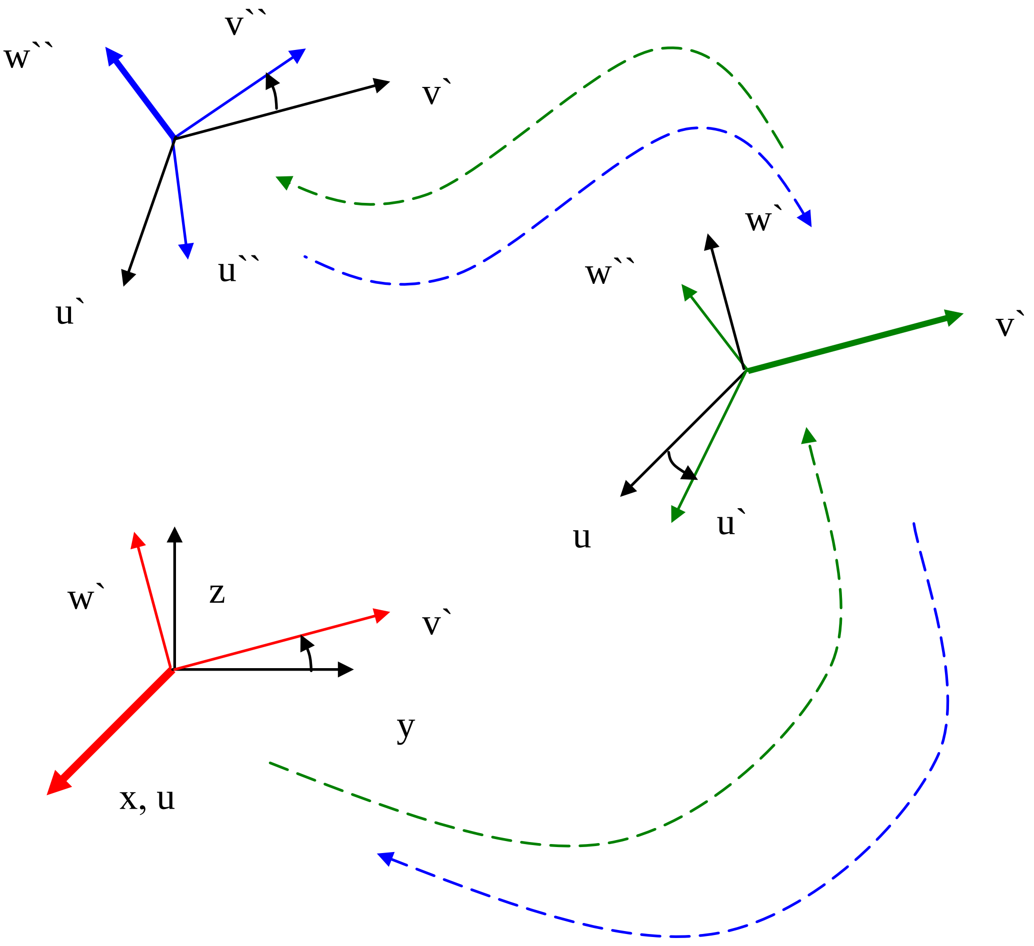


Рис. 1.10. Последовательности преобразований

1.6.3. Матрицы сложных поворотов

Матрица преобразования поворота $СК_{uvw}$ относительно $СК_{xyz}$ может быть представлена как последовательность двух и более поворотов:

$$\tau_{xyz,\ uvw} = \tau_{xyz,\ uvw}(1) \cdots \tau_{xyz,\ uvw}(n-1)\ \tau_{xyz,\ uvw}(n),$$

где $\tau_{uvw,\ xyz}(i)$ – матрица i-го поворота (композиция элементарных поворотов или отдельные элементарные повороты).

Если, например, $\tau_{i-1,\ i}$ – матрица поворота $СК_i$ относительно $СК_{i-1}$, то матрицу поворота $СК_i$ относительно $СК_0$ можно представить в виде

$$\tau_{0i} = \prod^{i} \tau_{k-1\ k} = \tau_{01}\, \tau_{12}\, \tau_{23}\ \ldots\ \tau_{n-1\ n}$$

$k=1$

Матрицы сложных поворотов можно представить в рекуррентной форме

$$\tau_{0i} = \tau_{0i-1}\,\tau_{i-1\,i}\,,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

1.6.4. Матрицы поворота СК смежных звеньев ИМ

Положение в пространстве СК$_i$ относительно СК$_{i-1}$ можно задать, выполнив последовательно четыре поворота СК$_i$, – вокруг оси Z_i на угол $\sigma_i q_i$, затем последовательно вокруг осей X_i\`, $Y_i$\`\`, $Z_i$\`\`\`.

Поэтому матрица поворота СК$_i$ относительно СК$_{i-1}$ может быть записана в виде

$$\tau_{i-1i} = \tau_{i-1i}\,(\text{ось } Z_i,\ \text{угол } \sigma_i q_i)\tau_{i-1i}\,(\text{ось} X_i`,\text{угол } \alpha_i)\text{x}$$
$$\tau_{i-1i}\,(\text{ось} Y_i``,\text{угол } \beta_i)\tau_{i-1i}\,(\text{ось } Z_i```,\ \text{угол } \gamma_i)\ .$$

Используя матрицу τ_{i-1i}, можно определить координаты вектора, заданного в СК$_i$, в СК$_{i-1}$:

$$a^{(i-1)} = \tau_{i-1\,i}\,a^{(i)},$$

Обратное преобразование запишется так:

$$a^{(i)} = \tau_{i\,i-1}\,a^{(i-1)}\,.$$

Матрицы $\tau_{i-1\,i}$ и $\tau_{i\,i-1}$ связаны соотношениями

$$\tau_{i-1\,i} = \tau^{T}_{i\,i-1}\,.$$

С учетом введенных в п.1.6.1 обозначений можно записать

$$\tau_{i-1i} = \tau_z\,(\sigma_i q_i)\,\tau_x(\alpha_i)\,\tau_y(\beta_i)\,\tau_z(\gamma_i),$$

$$\tau_{i\,i-1} = \tau_{ii-1}^{-1} = \tau_z^{T}(\gamma_i)\tau_y^{T}(\beta_i)\tau_x^{T}(\alpha_i)\tau_z^{T}(\sigma_i q_i) = \tau_{i-1i}^{T}\ . \qquad (1.4)$$

Очевидно,

$\tau_z\,(\sigma_i q_i)$ матрица поворота СК$_i$ вокруг оси Z_{i-1} на угол $\sigma_i q_i$,

$\tau_x\,(\alpha_i)$ – матрица поворота СК$_i$ вокруг оси z_i\` (после предыдущего поворота СК$_i$), на угол α_i ,

$\tau_y\,(\beta_i)$ – матрица поворота СК$_i$ вокруг оси y_i\`\` (после двух предыдущих поворотов) на угол β_i ,

$\tau_z\,(\gamma_i)$ – матрица поворота СК$_i$ вокруг оси z_i\`\`\` (после трех предыдущих поворотов) на угол γ_i.

Матрица $\tau_z(\gamma_i)\tau_y(\beta_i)\tau_x(\alpha_i) = \text{const}$.

Обозначив

$\boldsymbol{\varepsilon_i = \tau_x(\alpha_i)\tau_y(\beta_i)\tau_z(\gamma_i)}$**,** выражение для τ_{i-1i} можно представить в виде

$$\tau_{i-1i} = \tau_z(\sigma_i q_i)\tau_x(\alpha_i)\tau_y(\beta_i)\tau_z(\gamma_i) = \tau_z(\sigma_i q_i)\varepsilon_i$$

Обратная матрица имеет вид

$$\tau_{i\,i-1} = \varepsilon_i^T\,\tau_z^T(\sigma_i q_i).$$

Таким образом, матрица преобразования систем координат смежных звеньев является функцией одной переменной – i-й обобщенной координаты ИМ и четырех постоянных величин – индикатора типа i-го сочленения и 3-х конструктивных параметров – углов установки оси сочленения i относительно оси (i-1)-го сочленения.

2. Положение ИМ в рабочем пространстве. Линейные и угловые координаты звеньев

2.1. Линейные координаты звеньев ИМ относительно базовой СК

Из рис.2.1

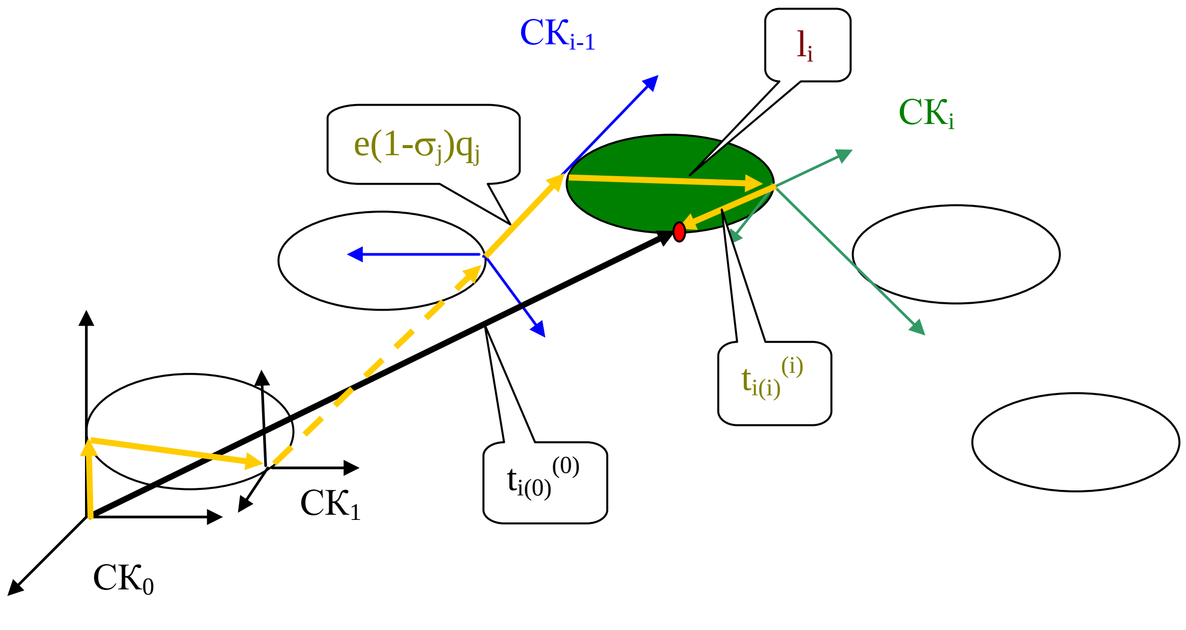


Рис.2.1 Вычисление линейных координат точек звеньев

следует, что координаты некоторой точки t на звене i, заданной относительно связанной с этих звеном СК$_i$ вектором $t_{i(i)}^{(i)}$, относительно инерциальной СК $t_{i(0)}^{(0)}$ могут быть вычислены следующим образом

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i}\, t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} (\tau_{0j-1}\, e(1-\sigma_j)q_j + \tau_{0j}\, l_j),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Обозначено $e = [001]^T$ - орт оси Z.

Учитывая, что

$\tau_{0j-1}\, e = \tau_{0j-1}\, \tau_{j-1i}\, \tau_{i\,j-1} e = \tau_{0j}\, \tau_{i\,j-1} e = \tau_{0j}\, \varepsilon^T_i\, \tau^T_z(\sigma_i q_i)\, e = \tau_{0j}\, \varepsilon^T_i\, e = \tau_{0j}\, \nu_i,$

где

$$\nu_i = \varepsilon^T_i\, e = \mathrm{const},$$

последнее выражение можно переписать так

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i}\, t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, (\nu_i (1-\sigma_j)q_j + l_j) = \tau_{0i}\, t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, L_i,$$

где

$$\tau_{0j} = \prod_{k=1}^{j} \tau_{k-1\,k}$$

- матрица поворота $СК_j$ относительно $СК_0$,

$$L_i = \nu_i (1-\sigma_i)q_i + l_i \; -$$

вектор длины i-го звена с учетом перемещений в поступательной паре.

В представленных в данном подразделе выражениях

ν_i - вектор проекций орта Z_{i-1} на оси $СК_i$,

ε_i – матрица поворота $СК_i$ относительно $СК_{i-1}$ при нулевых значениях координат q_i.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначения

$$t_{i(i)}^{(i)} = t_i$$

2.2. Ориентация звеньев ИМ относительно базовой СК

Ориентация СК звеньев относительно базовой СК устанавливается с ипользованием систем координат звеньев по матрицам τ_{0i}. Первые столбцы этих матриц – проекции ортов осей X $СК_i$ на оси базовой СК. Вторые столбцы -

проекции ортов осей Y $СК_i$ на оси базовой СК. Третьи - проекции ортов осей Z $СК_i$ на оси базовой СК. Элементы матриц τ_{0j} – косинусы углов между одноименными осями СК звеньев и базовой СК.

На практике неудобно определять относительную ориентацию осей СК, рассматривая значения косинусов углов между осями соответствующих СК. В этой связи для определения взаимной ориентации осей СК применяется параметры, более привычные для восприятия. Представление об окружающей действительности человеку более удобно отображать в форме расстояний и углов. Выше мы получили формулы для расчета линейных координат точек на звеньях. Однако эти данные не полностью отражают положение звена ИМ МР в пространстве. Для полного представления о положении звена ИМ нужно определить также ориентацию СК звена относительно базовой СК в удобном для восприятия виде. В Теоретической Механике для этого предложено применять угловые координаты. Для определения ориентации звеньев СК звеньев относительно базовой СК применяются углы Эйлера.

Предполагается, что связанная со звеном СК повернута из исходного положения, совпадающего с инерциальной СК, до ее фактического положения в результате выполнения трех поворотов. Каждый из поворотов осуществляется на определенный угол. Тогда информация о взаимной ориентации двух СК может быть представлена в виде трех углов.

Преобразование поворота подвижной СК{uvw} относительно трех осей инерциальной СК{xyz} представляется в виде композиции из трех элементарных поворотов:
- ось u, угол <u>P</u>itch,
- ось v`, угол <u>Y</u>aw,
- ось w``, угол <u>R</u>oll (см. выше п.1.6.2):

$\tau_{xyz,\, uvw} = \tau_{xyz,\, uvw}$ (ось u, угол <u>P</u>itch) $\tau_{xyz,\, uvw}$ (ось v`, угол <u>Y</u>aw) $\tau_{xyz,\, uvw}$ (ось w``, угол <u>R</u>oll)

Таким образом для определения орентации $СК_i$ относительно базовой $СК_0$ используются значения трех углов (<u>R</u>, <u>Y</u>, <u>P</u>).

Рассмотрим выражения для определения углов (<u>R</u>, <u>Y</u>, <u>P</u>). С одной стороны,
$\tau_{0i} = \tau_{0i}$ (ось u, угол <u>P</u>itch) τ_{0i} (ось v`, угол <u>Y</u>aw) τ_{0i} (ось w``, угол <u>R</u>oll).

С другой стороны,

$$\tau_{0j} = \prod_{k=1}^{j} \tau_{k-1\,k} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix},$$

причем значения $\tau_{k-1\,k}$ нам известны; поэтому известны и τ_{0j}.

Полагая известными τ_{0i}, найдем значения углов <u>R</u>, <u>Y</u>, <u>P</u>. Для этого вначале представим предпоследенее соотношение в виде

τ_{0i}^{T} (ось u, угол <u>P</u>) $\tau_{0i} = \tau_{0i}$ (ось v`, угол <u>Y</u>) τ_{0i} (ось w``, угол <u>R</u>).

Выполняя действия, предписанные последним соотношением, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \underline{P} & \sin\underline{P} \\ 0 & -\sin \underline{P} & \cos \underline{P} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\underline{Y} & 0 & \sin\underline{Y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\underline{Y} & 0 & \cos\underline{Y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\underline{R} & -\sin\underline{R} & 0 \\ \sin\underline{R} & \cos\underline{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выполняя соответствующие действия, получим (для краткости знак подчеркивания опущен),

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21}\cos P+t_{31}\sin P & t_{22}\cos P+t_{32}\sin P & t_{33}\sin P+t_{23}\cos P \\ t_{32}\cos P-t_{22}\sin P & -t_{22}\sin P+t_{32}\cos P & -t_{23}\sin P+t_{33}\cos P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Y\cos R & -\cos Y\sin R & \sin Y \\ \sin R & \cos R & 0 \\ -\sin Y\sin R & \sin Y\cos R & \cos Y \end{vmatrix}.$$

Здесь и ниже мы обозначили угол P = угол $\underline{P}$, Y = угол $\underline{Y}$, R = угол $\underline{R}$.

Сравнив элементы . $_{32}$ матриц в левой и правой части, видим, что

$$t_{23} \cos P + t_{33} \sin P = 0,$$

откуда

$$\sin P / \cos P = - t_{23} / t_{33} \quad \text{и}$$

$$\underline{P} = \mathrm{Arctg}\,(- t_{23} / t_{33}).$$

Далее сравним элементы . $_{13}$ и .$_{33}$ матриц:

$$\sin Y = t_{13}, \ \cos Y = - t_{23} \sin P + t_{33} \cos P \quad \text{и}$$

$$\underline{Y} = \mathrm{Arctg}\,(t_{13} / (-t_{23} \sin P + t_{33} \cos P)).$$

Наконец, расмотрим элементы .$_{21}$ и .$_{22}$:

$$\sin R = t_{21} \cos P + t_{31} \sin P, \ \cos R = t_{22} \cos P + t_{32} \sin P \quad \text{и}$$

$$\underline{R} = \mathrm{Arctg}\,((t_{21} \cos P + t_{31} \sin P) / (t_{22} \cos P + t_{32} \sin P)).$$

2.3. Прямая позиционная кинематическая задача

Определение линейных координат точек на ЗУМ и ориентации СК ЗУМ относительно базовой СК (определение углов Эйлера) при заданных значениях координат шарниров и заданных параметрах звеньев ИМ носит название прямой позиционной кинематической задачи (применяется также термин «позиционная задача»).

Решение прямой позиционной задачи выражается формулами

$$t_{n(0)}^{(0)} = \tau_{0n}\, t_{n(n)}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \tau_{0j}\, (\nu_j\, (1-\sigma_j) q_j + l_j) ,$$

или

$$t_{n(0)}^{(0)} = \tau_{0n}\, t_{n(n)}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \tau_{0j}\, L_j ,$$

где

$$L_j = \nu_j\, (1-\sigma_j) q_j + l_j$$

- вектор, связывающих начала СК смежных звеньев,

$$\tau_{0n} = \prod_{k=1}^{n} \tau_{k-1\,k} ,$$

$$t_n = t_{n(n)}^{(n)}.$$

Прямая позиционная кинематическая задача всегда имеет решение и притом единственное.

2.4. Понятие обратной позиционной кинематической задачи

Определение координат сочленений по заданным линейным координатам ЗУМ и углам его ориентации относительно базовой СК при известных параметрах звеньев ИМ носит название обратной кинематической задачи о положении ИМ или обратной позиционной кинематической задачи (сокращенно, ОКЗ).

В общей постановке для многих ИМ обратная позиционная кинематическая задача может иметь несколько решений, бечсисленное множество решений или не иметь ни одного решения.

Первый случай связан с тем, что одному и тому же положению и ориентации ЗУМ относительно базовой СК может соответствовать несколько разных наборов значений координата шарниров.

2.5. Однородные координаты и однородные преобразования в робототехнике

В робототехнике широкое распространение получили т.н. однородные координаты.\

Смысл однородных координат состоит в следующем.

Если $t_{i\,(i)}^{(i)}$ – вектор координат некоторой точки относительно начала СК$_i$, то координаты этой же точки относительно начала координат СК$_{i-1}$, т.е. вектор

$t_{i\,(i-1)}^{(i-1)}$ может быть вычислен так

$$t_{i\,(i-1)}^{(i-1)} = \tau_{i-1\ i}\ (t_i + L_i),$$

Пусть теперь

$\underline{t}_{i\ (i-1)}^{(i-1)} = (t_{i\ (i-1)}^{(i-1)}\quad 1)^T$ - вектор, составленный из компонент $t_{i\ (i-1)}^{(i-1)}$, к которым добавлена 1 на месте 4-го элемента.

Аналогично составим 4-мерный вектор $\underline{t}_i$

Составим теперь матрицу (4x4)

$$^{i-1}T_i = \begin{matrix} \tau_{i-1\,i} & \tau_{i-1\,i}\,L_i \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

В ней $\tau_{i-1\,i}\ L_i = L_i^{\ (i-1)}$.

Принимая во внимание, что

$$\underline{t}_i = (t_i\quad 1)^T,$$

нетрудно видеть,

$$\underline{t}_{i\,(i-1)}^{(i-1)} = {}^{i-1}T_i\ \underline{t}_i$$

и матрица $^{i-1}T_i$ задает сразу два преобразования – поворот (матрица $\tau_{i-1\ i}$) и перенос – вектор $\tau_{i-1\ i}\ L_i^{(i)}$.

4-мерные векторы вида $\underline{t}_{i\ (i)}^{(i)}$, определяющие линейные координаты звеньев, получили название однородных координат, а матрицы (4x4), вида $^{i-1}T_i$, описывающие преобразование однородных векторов – матрицам однородных пребразований.

Матрицы однородных преобразований позволяют одним действием описать и операции поворота и операции переноса.

С использованием матриц однородных преобразований координаты точки $\underline{t}_{i\ (i)}^{(i)}$ относительно инерциальной системы, т.е. $\underline{t}_{i\,(0)}^{(0)}$ можно представить в виде

$$\underline{t}_{i\,(0)}^{(0)} = \prod_{j=1}^{i} {}^{i-1}T_i\ \underline{t}_i,$$

причем в матрице $^{i-1}T_i$ отдельные элементы имеют вид

$$^{0}T_i = \begin{matrix} \tau_{0i} & \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\,L_j \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

и образуются в результате перемножения матриц $^{0}T_1\ {}^{1}T_2\ \dots\ {}^{i-1}T_i$

Полученное выражение для $\underline{t}_{i\,(0)}^{(0)}$ является аналогом выражений

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i}\, t_i + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, L_j$$

$$\tau_{0j} = \prod_{k=1}^{j} \tau_{k-1\,k}\,,$$

и отличается от них более компактной записью (и только!).

В самом деле:

$$^{0}T_i = \begin{pmatrix} \tau_{01} & \tau_{01} L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{12} & \tau_{12} L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \tau_{i-1\ i} & \tau_{i-1\ i} L_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{0i} & \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j} L_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Специальные системы координат

Денавит и Хартенберг предложили такой способ выбора систем координат, когда:

- этот выбор происходит однозначно,
- число параметров, определяющих взаимное расположение двух смежных СК равно только 4 (вместо 6-7 применяемых в общем случае).

Построение СК Д-Х включает последовательность действий по выбору начал СК и их осей (рис. ниже):

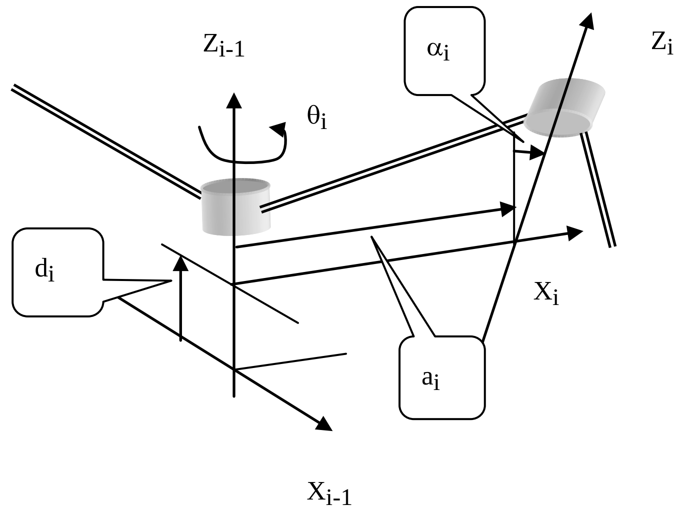


Рис.2.2. Параметры Денавита-Хартенберга

При использовании СК Д-Х с каждым звеном связаны 4 параметра: d_i, θ_i, α_i и a_i.

Эти параметры соответствуют параметрам звена (α_i и a_i) и сочленения (d_i, θ_i). Параметры сочленения характеризуют относительное положение смежных звеньев.

Способ выбора СК по Д-Х формализован и включает 12 действий.

Д1. Формирование базовой СК. Сформировать правую ортонормированную СК$_0$, связанную с основанием, направив ось Z_0 вдоль оси 1-го шарнира к плечу манипулятора. Оси X_0 и Y_0 – произвольно, перпендикулярно оси Z_0.

Д2. Начало и цикл. Для всех i (i=1,2,…,n-1) выполнить шаги Д3-Д6.

Д3. Формирование осей сочленений. Направить ось Z_i вдоль оси движения (вращательного или поступательного) i+1 –го сочленения. Для роботов с манипуляторами, имеющими конфигурацию левой-правой руки, оси Z_1 и Z_2 паправлены от плеча и общего направления манипулятора.

Д4. Формирование начала i-й СК. Расположить начало i-й СК на пересечении осей Z_i и Z_{i-1} или на пересечении общей нормали к осям Z_i и Z_{i-1} с осью Z_i.

Д5. Формирование оси X_i . Выбрать единичный вектор X_i следующим образом: X_i= +- (Z_{i-1} x Z_i)/| Z_{i-1} x Z_i | или вдоль общего перпендикуляра к осям Z_{i-1} и Z_i , если они параллельны.

Д6. Формирование оси Y_i. Положить Y_i , чтобы образовать провостороннюю СК. (Продолжить оси Z_i и X_i , если это необходимо для шагов Д9 – Д12).

Д7. Формирование СК схвата. Как правило, n-е сочленение является вращательным. Сформировать ось Z_n , направив ее вдоль оси Z_{n-1} и от робота. Выбрать ось X_n так, чтобы она была перпендикулярна осям Z_{n-1} и Z_n. Ось Y_n дополняет систему до правой тройки.

Д8. Определение параметров звеньев. Для каждого i (i=1,2,…,n) выполнить шаги Д9-Д12.

Д9. Определение d_i. d_i есть расстояние от начала i-1 СК до пересечения оси Z_{i-1} с осью X_i, отсчитываемое вдоль оси Z_{i-1}. Если i-е сочленение – поступательное (σ_i = 0), то d_i – присоединенная переменная (координата шарнира). Если нет (σ_i = 1), то d_i = const.

Д10. Определение a_i . a_i – расстояние между пересечением оси Z_{i-1} с осью X_i и началом i-й СК, отсчитываемое вдоль оси X_i.

Д11. Определение θ_i. θ_i – угол, на который нужно повернуть ось X_{i-1} вокруг оси Z_{i-1}, чтобы она стала сонаправлена с осью X_i. Если i-е сочленение – вращательное (σ_i = 1), то θ_i – присоединенная переменная. Если i-е сочленение – поступательное (σ_i = 0), θ_i = const.

Д12. Определение α_i . α_i – угол, на который нужно повернуть ось Z_{i-1} вокруг оси X_i, чтобы она стала сонаправлена с осью Z_i.

Как только СК Д-Х сформированы, можно определить и матрицу однородного преобразования СК смежных звеньев:

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \tau_{i-1\ i} & \tau_{i-1\ i} L_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , $$

Причем

$$ \tau_{i-1\ i} = \tau_z(\sigma_i q_i + (1-\sigma_i)\theta_i)\ \tau_x(\alpha_i) $$

– матрица поворота СК смежных звеньев (СК$_i$ относительно СК$_{i-1}$),

$$\tau_{i-1\ i}\, L_i^{(i)} = L_i^{(i-1)} = (e_i\,(1-\sigma_j)q_j + \sigma_i\, d_i) + \tau_z(\sigma_i q_i + (1-\sigma_i)\,\theta_i)\,\tau_x(\alpha_i)\ (a_i\ 0\ \ 0)^T =$$
$$(e_i\,(1-\sigma_j)q_j + \sigma_i\, d_i) + \tau_z(\sigma_i q_i + (1-\sigma_i)\,\theta_i)\,(a_i\ 0\ \ 0)^T.$$

Используя такую запись, будем иметь:

при $\sigma_i = 1$ значение $\tau_{i-1\ i}\, L_i^{(i)} = d_i + \tau_z({}_i q_i)\,(a_i\ 0\ \ 0)^T$;

при $\sigma_i = 0$ значение $\tau_{i-1\ i}\, L_i^{(i)} = (e_i\, q_j) + \tau_z(\theta_i)\,(a_i\ 0\ \ 0)^T$.

Достоинство СК Д-Х – формализацию процедуры выбора СК звеньев. Это полезно, например, при написании статей – нет необходимости дополнительно описывать и комментировать действия по выбору СК манипулятора. Однако, в силу такой формализации, пользователь лишен возможности располагать начала СК звеньев произвольным образом. В этой связи, зачастую, при построении СК, начала систем координат могут расположиться вне шарниров манипулятора. Это приводит к тому, что определенные с использованием метода Д-Х координаты сочленений теряют физический смысл.

3. Угловая и линейная скорости звеньев ИМ

3.1. Угловые скорости звеньев ИМ

Учитывая, что смежные звенья ИМ могут вращаться (или перемещаться) в направлении только одной оси, нетрудно записать соотношения для определения векторов относительных скоростей вращения звеньев. Вектор угловой скорости вращения звена i относительно звена i-1 в проекциях на оси $СК_{i-1}$ запишется так:

$$\varpi_i^{(i-1)} = e\sigma_i q_i^{`},\ (i = 1,2,\ldots,n),$$

где $q_i^{`}$ - производная по времени координаты q_i.

Замечание. В случае, когда в записи вектора скорости используется один верхний и один нижний индекс, соответствует случаю рассмотрения вектора, заданного в СК с номером «нижний индекс», в проекциях на оси СК с номером «верхний индекс». Ситуация с одним нижним индексом – случаю рассмотрения вектора в проекциях на оси СК «нижний индекс».

Вектор угловой скорости $\varpi_i^{(0)}$ (в проекциях на оси $СК_0$) запишется так:

$$\varpi_i^{(0)} = \tau_{0i}\nu_i\sigma_i q_i^{`},\ (i = 1,2,\ldots,n),$$

Каждое последующее звено ИМ участвует во вращении всех предыдущих. Поэтому, обозначив ω_i - вектор угловой скорости звена i, можем записать:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \varpi_j^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\varpi_j$$

или в развернутой форме записи

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, \nu_j\, \sigma_j q_j^{`} .$$

Введем обозначения

$$c_j^{(0)} = \tau_{0j}\, \nu_j \sigma_j .$$

Тогда соотношения для расчета $\omega_i^{(0)}$ можно переписать так:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} c_j^{(0)} q_j^{`} ,$$

Очевидно $c_j^{(0)}$ – векторы размера (3х1).

3.2. Свойства векторов $c_j^{(0)}$.

а) С учетом того, что v_j - это вектор проекций оси Z_{j-1} на оси $СК_j$ следует, что $c_j^{(0)}$ – орт оси Z_{j-1}, спроецированный на оси $СК_0$.

б) $c_j^{(0)} = 0$ когда j = [ПП] - следует непосредственно из того, что в соотвтствющее выражение входит σ_j.

в) Поскольку $c_j^{(0)}$ – проекции единичного вектора на оси различных СК,

$$| (c_j^{(0)}) | = 1,$$

если j = [ВП].

3.3. Матрицы-якобианы угловых скоростей ИМ.

Обозначим $q = \{q_1 ,q_2 ,\dots,q_n \}^T$ – вектор, составленный из обобщенных (присоединенных) координат ИМ и назовем его вектором обобщенных (присоединенных) координат ИМ.

Из выражений для $\omega_i^{(0)}$ следует

$$\omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q^{`}$$

где

$$C_n^{(0)} = [c_1^{(0)}\, c_2^{(0)} \dots\ c_n^{(0)}],$$

матрица, составленная из векторов $c_j^{(0)}$; размер матрицы $C_n^{(0)}$ - (3xn).

Матрица $C_n^{(0)}$ линейно связывает между собой векторы производных по времени обобщенных координат ИМ и вектор угловой скорости последнего (n-го) звена ИМ и носит название матрицы-якобиана угловых скоростей ИМ. Чаще всего рассматривают матрицы-якобианы последнего звена ИМ.

Аналогично можно построить матрицу-якобиан $C_i^{(0)}$ для любых других звеньев ИМ.

Важным является то, что с помощью этих матриц можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей вращения шарниров), определить угловую скорость любого звена ИМ.

Зная $c_i^{(0)}$, можно составить блочные матрицы $C^{(0)}$, в которых матрицы $c_i^{(0)}$ будут представлены (блочными) строками размера (3xn) с соответствующими номерами. Размер блочных матриц – (3nxn).

С использованием таких блочных матриц можно записать выражения для расчета угловых скоростей сразу всех звеньев ИМ:

$$\omega^{(0)} = C^{(0)} q^{`} ,$$

где

$$\omega^{(0)} = [\omega_1^{(0)T}\ \omega_2^{(0)T}\ \dots\ \omega_n^{(0)T}\ ]^T .$$

Элементы блочных матриц $C^{(0)} = \{c_i^{(0)}\}$ – векторы $c_j^{(0)}$.

Элементы блочной матрицы $C^{(0)}$ следует принять равными нулю при j>i.

Блочная матрица $C^{(0)}$ название матрицы-якобиана угловых скоростей ИМ.

3.4. Производные по времени матриц преобразований поворота.

3.4.1. Запись производной по времени матрицы τ_{i-1i}

Матрица $\tau^{`}_{i-1i}$ равна

$$\tau^{`}_{i-1i} = \tau_{i-1i}\,\lambda(\varpi_i),$$

где обозначено $\lambda(*)$ – матрица (3x3) векторного произведения, составленная из элементов вектора

$* = \{*_x\ *_y\ *_z\ \}^T$:

$$\lambda(.) = \begin{vmatrix} 0 & -*_z & *_y \\ *_z & 0 & -*_x \\ -*_y & *_x & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица используется при записи векторного произведения в координатной форме.

3.4.2. Свойства матрицы векторного произведения $\lambda(.)$

а) $\lambda^T(.) = -\lambda(.)$; следует из того, что $\lambda(.)$ – кососимметрическая матрица.

б) Если **a, b** – 3-мерные векторы, то векторное произведение **a**x**b** в координатной форме записи равно $\lambda(a)b$, что непосредственно следует из свойств векторного произведения.

в) $\lambda(a)b = -\lambda(b)a$; непосредственно следует из свойств векторного произведения.

г) $\lambda(a^{(i)}b^{(i)} = \tau_{ij}\ \lambda(a^{(j)})b^{(j)} = \lambda(\tau_{ij}\ a^{(j)})\tau_{ij}b^{(j)}$; следует из свойств векторного произведения: результат векторного произведения не зависит от СК, в которой оно выполнено. Представленные соотношения можно переписать иначе:

$$\lambda(a^{(j)})b^{(j)} = \tau^{T}_{ij}\,\lambda(\tau_{ij}\,a^{(j)})\tau_{ij}b^{(j)}\ .$$

Поскольку представленные соотношения справедливы для любого вектора $b^{(j)}$, $b^{(j)}$ можно опустить:

$$\lambda(a^{(j)}) = \tau^{T}_{ij}\,\lambda(\tau_{ij}\,a^{(j)})\tau_{ij}.$$

Последнее выражение можно переписать так

$$\lambda(\tau_{ij}\,a^{(j)}) = \tau^{T}_{ij}\,\lambda(a^{(j)})\tau_{ij},$$

д) $\lambda(\sum\limits_{k=1}^{i} a_k^{(j)}) = \sum\limits_{k=1}^{i}\lambda(a_k^{(j)})$. Это соотношение очевидно.

3.4.3. Вычисление $\grave{\tau}_{i-1i}$.

В справедливости выражений п.3.4.1 нетрудно убедиться, выполнив предписанные ими действия:

$$\grave{\tau}_{i-1i} = \grave{\tau}_{z}\,(\sigma_i q_i)\,\varepsilon_i = \left(d \begin{vmatrix} \cos(\sigma_i q_i) & -\sin(\sigma_i q_i) & 0 \\ \sin(\sigma_i q_i) & \cos(\sigma_i q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} / \,dt\right) \varepsilon_i =$$

$$\begin{vmatrix} -\sin(\sigma_i q_i) & -\cos(\sigma_i q_i) & 0 \\ \cos(\sigma_i q_i) & -\sin(\sigma_i q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \varepsilon_i\,\sigma_i \grave{q}_i = \begin{vmatrix} \cos(\sigma_i q_i) & -\sin(\sigma_i q_i) & 0 \\ \sin(\sigma_i q_i) & \cos(\sigma_i q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \varepsilon_i\,\sigma_i \grave{q}_i =$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i)\,\lambda(e)\,\varepsilon_i\,\sigma_i \grave{q}_i = \tau_z(\sigma_i q_i)\,\lambda(\varepsilon_i\,(\varepsilon^{T}_{i}\,e)\,)\,\varepsilon_i\,\sigma_i \grave{q}_i = \tau_z(\sigma_i q_i)\varepsilon_i\,\lambda(v_i)\,\varepsilon^{T}_{i}\varepsilon_i\,\sigma_i \grave{q}_i =$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i)\varepsilon_i\,\lambda(v_i\,\sigma_i \grave{q}_i\,) = \tau_{i-1i}\,\lambda(\varpi_i),$$

3.4.4. Производная по времени матрицы τ_{0i}.

Продифференцируем выражение для τ_{0i} по времени; получим

$$\grave{\tau}_{0i} = d\,(\prod_{k=1}^{i} \tau_{k-1\,k})/dt = \sum_{k=1}^{i} \tau_{0\,k-1}\grave{\tau}_{k-1\,k}\tau_{ki} = \sum \tau_{0\,k-1}\tau_{k-1k}\,\lambda(\varpi_k)\,\tau_{ki} =$$

$$\sum \tau_{0\,k}\,\lambda(\varpi_k)\,\tau_{k0}\tau_{0\,k}\,\tau_{ki} = \sum \tau_{0k}\,\lambda(\varpi_k)\,\tau_{k0}\tau_{0i} = \sum \lambda(\tau_{0k}\varpi_k)\,\tau_{0i} = \lambda(\sum\tau_{0k}\,\varpi_k)\,\tau_{0i} =$$

$$\lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}.$$

Или

$$\tau^{`}_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}.$$

3.5. Линейные скорости звеньев ИМ

Соотношения для определения линейных скоростей звеньев получим, продифференцировав выражения для $V_i^{(0)}$ по времени:

$$V_i^{(0)} = t^{`}_i{}^{(0)} = \tau^{`}_{0i}\,t_i + \sum_{k=1}^{i} \tau^{`}_{0k}\,(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k) + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\,(v_j(1-\sigma_j)q^{`}_j).$$

(Различные индексы суммирования во втором и третьем слагаемых приняты для удобства дальнейших преобразований).

Подставив сюда значения $\tau^{`}_{0k} = \lambda(\omega_k^{(0)})\,\tau_{0k}$, получим

$$V_i^{(0)} = t^{`}_i{}^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}\,t_i + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}\,(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j) + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\,(v_j(1-\sigma_j)q^{`}_j).$$

3.5.а. Линейные скорости звеньев ИМ (вариант без дифференцирования).

Учитывая, что в кинематической цепи ИМ каждое i-е звено участвует в движении всех предшествующих звеньев (j = 1,2,…i), вектор абсолютной линейной скорости движения этой точки этой точки можно записать так (подвижные/вращающиеся СК)

$$V_i^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}\,t_i + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}\,(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j) + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\,(v_j(1-\sigma_j)q^{`}_j).$$

Здесь $\lambda(a)$ - кососимметрическая матрица, используемая для записи в векторно-матричной форме векторного произведения векторов a и b, а именно,

$$a \times b = (\text{по определению})\ \lambda(a)b,$$

где

$$\lambda(a) = \begin{vmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{vmatrix} -$$

кососимметрическая матрица, компоненты которой – элементы вектора a.

Развернем полученное выражение для линейной скосроти, подставив в него

$$\omega_k^{(0)} = \sum_{j=1}^{k} \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{`}_j\ .$$

Получим

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j)\,\tau_{0i} t_i\, q^{`}_j + \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{k} \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j)\,\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k)\, q^{`}_j +$$

$$\sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, \nu_j\, (1-\sigma_j)\, q'_j.$$

Покажем, что полученное выражение можно представить в следующем виде *(а также из геометрических соображений – рис.3.1):*

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} D_{ij}^{(0)}\, q'_j\,,$$

где

$$D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j}\, \nu_j \sigma_j)\, R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j}\, \nu_j\, (1-\sigma_j) =$$

$$\lambda(c_j^{(0)})\, R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j}\, \nu_j\, (1-\sigma_j),$$

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i} t_i + \sum_{k=j}^{i} \tau_{0k}\, (\nu_k\, (1-\sigma_k) q_k + l_k).$$

Доказательство.

Для $\tau_{0j}\, \nu_j\, (1-\sigma_j)$ *все очевидно (из третьего слагаемого выражения для* $V_i^{(0)}$*).*

$\lambda(c_j^{(0)})\ R_{ij}^{(0)}$ *получается в результате преобразований двух первых слагаемых. Первое слагаемое из выражения для* $V_i^{(0)}$ *в выражение для* $R_{ij}^{(0)}$ *переходит непосредственно. Докажем, что второе слагаемое в* $R_{ij}^{(0)}$ *можно получить, преобразовав второе слагаемое в* $V_i^{(0)}$ *путем изменения порядка и пределов суммирования.*

В самом деле:

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{j=1}^{k} \lambda(\tau_{0j} \nu_j \sigma_j)\ \tau_{0k}(\nu_k\, (1-\sigma_k) q_k + l_k)\, q'_j = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i} \lambda(\tau_{0j}\, \nu_j \sigma_j)\ \tau_{0k}\, (\nu_k\, (1-\sigma_k) q_k + l_k)\, q'_j =$$

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda(\tau_{0j}\, \nu_j \sigma_j) \sum_{k=j}^{i} \tau_{0k}\, (\nu_k\, (1-\sigma_k) q_k + l_k)\, q'_j\,.$$

Пояснение.

До перестановки: $k=1, j=1.$

$k=2, j=1,2.$

…

$k=i, j=1,2,\ldots,i.$

После перестановки:

$j=1, k=1,\ldots,i,$

$j=2, k=2,\ldots,i,$

…

$j= i, k=i.$

Можно видеть, что полученное выражение соответствует второму слагаемому $R_{ij}^{(0)}$ *, что и требовалось доказать.*

$D_{ij}^{(0)}$ - векторы размера (3x1).

3.6. Свойства векторов $D_{ij}^{(0)}$

а) $D_j^{(0)}$ - орт оси Z_{j-1}, спроецированный на оси $СК_0$., если j = [ПП].

б) $D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j}\, v_j\sigma_j)\, R_{ij}^{(0)}$, если j = [ВП].

г) $|D_j^{(0)}| = 1$, если j = [ПП] .

е) $R_{ij}^{(0)}$ - есть вектор, проведенный из начала $СК_{j-1}$ к точке на звене i, скорость которой определяется, рассматриваемый в проекциях на оси $СК_0$.

ж) $|R_{ij}^{(0)}|$ - длина вектора, проведенного из начала $СК_{j-1}$ к точке на звене i, скорость которой определяется.

з) $|D_{ij}^{(0)\omega}|$ = площади прямоугольника, построенного на векторах $c_j^{(0)}$ и $R_{ij}^{(0)}$ как на сторонах. Поскольку $|c_j^{(0)}| = 1$, $|D_{ij}^{(0)\omega}|$ численно равен длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора $R_{ij}^{(0)}$ к линии вдоль вектора $c_j^{(0)}$.

Геометрическая иллюстрация расчета векторов $D_{ij}^{(0)}$ и $R_{ij}^{(0)}$ дана на рис.3.1.

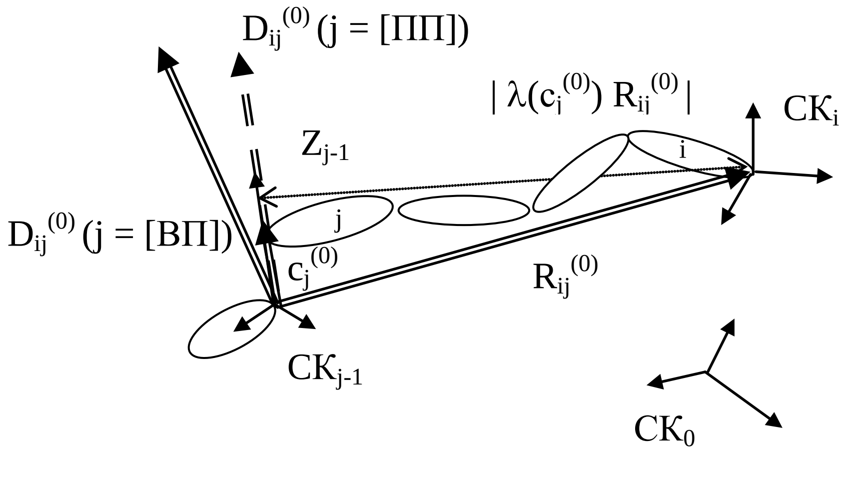


Рис.3.1. Векторы $D_{ij}^{(0)\omega}$, $R_{ij}^{(0)}$.

3.7. Матрицы-якобианы линейных скоростей ИМ.

Из выражений для расчета линейных скосротей звеньев ИМ следует

$$V_n^{(0)} = D_n^{(0)} \dot{q}$$

где

$$D_n^{(0)} = [D_{n1}^{(0)}\ D_{n2}^{(0)}\ \dots\ D_{nn}^{(0)}\ ] -$$

матрица, составленные из векторов $D_j^{(0)}$, имеющие размер (3xn).

Матрица $D_n^{(0)}$ линейно связывает между собой векторы производных по времени обобщенных координат ИМ и угловых скоростей последнего (n-го) звена ИМ и носит название матриц-якобианов линейных скоростей (n-го звена) ИМ.

Аналогично можно построить матрицу-якобиан $D_i^{(0)}$ для любых других звеньев ИМ.

Важным является то, что с помощью этих матриц можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей вращения шарниров), определить линейную скорость любого звена ИМ.

Зная $D_i^{(0)}$, можно составить блочную матрицу $D^{(0)}$, в которой матрицы $D_i^{(0)}$ представлены (блочными) строками размера (3xn) с соответствующими номерами. Размер блочных матриц – (3nxn).

С использованием таких блочных матриц ИМ можно записать выражения выражения для расчета угловых скоростей сразу всех звеньев ИМ:

$$V^{(0)} = D^{(0)} q` ,$$

где

$$V^{(0)} = [V_1^{(0)T} V_2^{(0)T} \dots V_n^{(0)T}]^T .$$

Элементы блочной матрицы $D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$ – векторы $D_{ij}^{(0)}$.

Поскольку в выражениях для расчета линейных скоростей суммирование ведется только до i, элементы матрицы $D^{(0)}$ ^{c}ледует принять равными нулю при j>i.

Блочная матрица $D^{(0)}$ носит название матрицы-якобиана линейных скоростей ИМ.

3.8. Матрица-якобиан последнего звена ИМ.

Выпишем выражения для расчета линейных и угловых скоростей последних звеньев ИМ:

$$\begin{cases} \omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q` \\ V_n^{(0)} = D_n^{(0)} q` \end{cases}$$

Составим теперь блочный вектор $[\omega_n^{(0)\,T} \mid V_n^{(0)\,T}]^T$ и блочную матрицу $\Xi^{(0)}$, элементы которой $c_i^{(0)}$ и $D_{ni}^{(0)}$:

$$\Xi^{(0)} = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & \dots & c_n^{(0)} \\ \hline D_{n1}^{(0)} & D_{n2}^{(0)} & \dots & D_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} .$$

Тогда систему уравнений (2.15) можно представить в виде одного уравнения

$$\begin{Bmatrix} \omega_n^{(0)} \\ \hline V_n^{(0)} \end{Bmatrix} = \Xi^{(0)} q` ,$$

связывающего между собой векторы угловой и линейной скорости последнего звена ИМ в базовой (декартовой) СК, и вектор производных обобщенных координат ИМ.

Связь между обобщенными и декартовыми координатами – линейная. Матрица $\Xi^{(0)}$, связывающая между собой обобщенные и декартовы кординаты последнего звена ИМ, называется матрицей-якобианом скоростей ИМ или просто матрицей-якобианом.

На практике необходимо решать обе задачи. Решения прямой задачи позволяет установить скорость движения ИМ по известным показаниям датчиков скорости, установленных на валах приводов. Решение обратной кинематической задачи - определить сигналы управления на входах приводов (при управлении приводами по скорости), соответствующие заданной скорости движения ИМ. Для решение обратной кинематической задачи для скоростей ИМ применяют специальные приемы, позволяющие исключить возможные неоднозначности.

Если при составлении матрицы $\Xi^{(0)}$ использовать в качестве элементов векторы $c_j^{(0)}$ и $D_{ij}^{(0)}$, можно решать задачи расчета скоростей любых других звеньев ИМ, а также обратные задачи.

3.9. Прямая кинематическая задача о скорости ИМ

Используя матрицу-якобиан $D_i^{(0)}$ можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей шарниров), определить линейную скорость рабочекго органа ИМ. Задача расчета линейных и угловых скоростей звеньев ИМ по известным производным обобщенных координат носит название прямой задачи о скорости звеньев ИМ МР.

Прямая кинематическая задача для скоростей ИМ всегда имеет решение и при том единственное.

3.10. Понятие обратной задачи о скорости ИМ

Использование матрицы-якобиана позволяет решать как прямую, так и обратную кинематическую задачу для скоростей ИМ (определение скоростей последнего звена по известным производным обобщенных координат ИМ и определение обобщенных координат по заданным скоростям последнего звена). В последнем случае необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

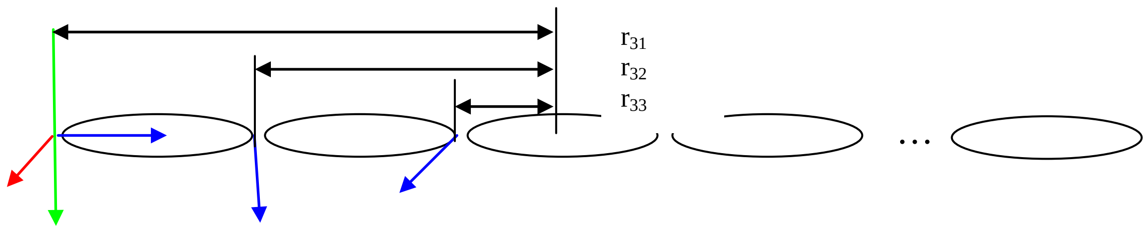
$$\grave{q} = \Xi^{(0)\,-1} \left\{ \begin{array}{c} \omega_n^{(0)} \\ \text{--------} \\ V_n^{(0)} \end{array} \right\},$$

Обратная кинематическая задача может иметь единственное решение, иметь множество решений или не иметь их совсем. Конкретный случай зависит от свойств матрицы-якобиана. Элементы матрицы-якобиана – функции обобщеных координат ИМ.

3.11. Примеры решения прямой и обратной задач о сокорости звеньев ИМ

3.11.1. Прямая и обратная кинематические задачи об угловой скорости звеньев ИМ

Обратимся к ИМ КМР ERA в рассмотренной выше конфигурации (вытянутое положение). Будем считать подвижными только первые три звена:



$c_1^{(0)} = [\ 0\ 0\ 1]^T$, $c_2^{(0)} = [\ 0\ 1\ 0]^T$, $c_3^{(0)} = [\ 1\ 0\ 0\ ]^T$.

$\omega_3^{(0)} = [\omega_{3x}^{(0)}\quad \omega_{3y}^{(0)}\quad \omega_{3z}^{(0)}\ ]^T = [\ 0\ 0\ 1]^T q`_1 + [\ 0\ 1\ 0]^T q`_2 + [\ 1\ 0\ 0]^T q`_3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q` = J\, q`$$

$$[q`_1\ q`_2\ q`_3\,]^T = J^{-1}\,\omega^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \mathrm{adj}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big/ \det J =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big/ -1\, [\omega_{3x}^{(0)}\quad \omega_{3y}^{(0)}\quad \omega_{3z}^{(0)}\ ]^T;$$

$q`_1 = \omega_{3z}^{(0)}$ , $q`_2 = \omega_{3y}^{(0)}$, $q`_3 = \omega_{3x}^{(0)}$.

3.11.1. Прямая и обратная кинематические задачи о линейной скорости звеньев ИМ

$V_3^{(0)} = [V_{3x}^{(0)}\quad V_{3y}^{(0)}\quad V_{3z}^{(0)}\ ]^T = D_{31}^{(0)}\, q`_1 + D_{32}^{(0)}\, q`_2 + D_{33}^{(0)} q`_3$

$D_{31}^{(0)} = \lambda(c_1^{(0)})\, R^{(0)}{}_{31} = [\ 0\ 0\ 0]^T$

$D_{32}^{(0)} = \lambda(c_2^{(0)})\, R^{(0)}{}_{32} = [\ r_{32}\ \ 0\ \ 0]^T$

$D_{32}^{(0)} = \lambda(c_2^{(0)})\, R^{(0)}{}_{32} = [\ 0\ \ -r_{33}\ \ 0]^T$

$$V_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q`$$

Матрица-якобиан имеет нуль на месте первого столбца и последней строки и является вырожденной. Это значит, что в исходной постанвке задача не имеет решения.

Из рассмотрения матрицы следует, что компонента $V_{3z}^{(0)}$ вектора $V_3^{(0)}$ не определена, а вектор $V_3^{(0)}$ не зависит от $q`_1$. Принимая это во внимание, откажемся от рассмотрения $V_{3z}^{(0)}$ и $q`_1$. Это эквивалентно вычеркиванию из матрицы-якобиана первого столбца и третьей строки. Тогда можно записать

$$[V_{3x}^{(0)} \quad V_{3y}^{(0)}]^T = \begin{bmatrix} r_{32} & 0 \\ 0 & -r_{33} \end{bmatrix} [q`_2 \ q`_3]^T$$

$$[q`_2 \ q`_3]^T = \begin{bmatrix} r_{32} & 0 \\ 0 & -r_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \{ \begin{bmatrix} -r_{33} & 0 \\ 0 & r_{32} \end{bmatrix} / (-r_{32} r_{33}\} \ [V_{3x}^{(0)} \quad V_{3y}^{(0)}]^T$$

$q`_2 = 1/r_{32} V_{3x}^{(0)}$
$q`_3 = -1/ r_{33} V_{3y}^{(0)}$.

Пример для ОКЗ в форме двузвенника –> в лекции 5-му курсу.

4. Угловые и линейные ускорения звеньев

4.1. Угловые ускорения

Продифференцируем $\omega_i^{(0)}$ по времени. Получим:

$$\omega`_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \tau`_{0j}\varpi_j + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\varpi`_j = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\varpi_j + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\varpi`_j,$$

или в развернутой форме записи

$$\omega`_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}v_j\sigma_j q`_j + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j} v_j\sigma_j q``_j,$$

где

$$\omega_j^{(0)} = \sum_{k=1}^{j} \tau_{0k}v_k\sigma_k q`_k .$$

С другой стороны, из полученных ранее соотношений следует

$$\omega`_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} c`_j^{(0)} q`_j + \sum_{j=1}^{i} c_j^{(0)} q``_j.$$

Сравнив между собой соотношения (4.1) и (4.2), увидим:

$$c`_j^{(0)} = \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}v_j\sigma_j = \lambda(\omega_j^{(0)})\, c_j^{(0)} .$$

Из полученных соотношений следует, что угловые ускорения звеньев ИМ линейно зависят от вторых производных обобщенных координат (зависимость задается векторами $c_j^{(0)}$) и квадратично – от первых производных обобщенных координат ИМ.

ВАРИАНТ: *Без дифференцирования матрицы* τ_{0j}.

По правилу дифференцирования вращающихся векторов

$$\omega`_1^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1$$
$$\omega`_2^{(0)} = \omega`_1^{(0)} + \lambda(\omega_1^{(0)})\, \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2$$
$$\omega`_3^{(0)} = \omega`_2^{(0)} + \lambda(\omega_2^{0)})\, \tau_{03} v_3 \sigma_3 q_3` + \tau_{03} v_3 \sigma_3 q``_3$$

... и т.д.

Перепишем в виде разностей абс. скоростей:

$$\omega`_1^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1$$
$$\omega`_2^{(0)} - \omega`_1^{(0)} = \lambda(\omega_1^{(0)})\, \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2$$
$$\omega`_3^{(0)} - \omega`_2^{(0)} = \lambda(\omega_2^{0)})\, \tau_{03} v_3 \sigma_3 q_3` + \tau_{03} v_3 \sigma_3 q``_3$$

... и т.д.

Запишем с использованием матрицы «косых сумм»:

$$(1 \quad 0 \quad 0)\ \omega`_1^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1$$
$$(-1 \quad 1 \quad 0)\ \omega`_2^{(0)} = \lambda(\omega_1^{(0)})\, \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2$$
$$(0 \quad -1 \quad 1)\ \omega`_3^{(0)} = \lambda(\omega_2^{0)})\, \tau_{03} v_3 \sigma_3 q_3` + \tau_{03} v_3 \sigma_3 q``_3$$

... и т.д.

Матрица в левой части имеет обратную в виде нижней треугольной

$$(1 \quad 0 \quad 0)$$
$$(1 \quad 1 \quad 0)$$
$$(1 \quad 1 \quad 1).$$

Умножим эту матрицу слева на обе части последнего соотношения

$$\omega`_1^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0)\ (\tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1)$$
$$\omega`_2^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 0)\ (\lambda(\omega_1^{(0)})\, \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2)$$
$$\omega`_3^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1)\ (\lambda(\omega_2^{0)})\, \tau_{03} v_3 \sigma_3 q_3` + \tau_{03} v_3 \sigma_3 q``_3)$$

... и т.д.

Выполним предписанные действия в правой части

$$\omega`_1^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1$$
$$\omega`_2^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1 + \lambda(\omega_1^{(0)}) \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2$$
$$\omega`_3^{(0)} = \tau_{01} v_1 \sigma_1 q``_1 + \lambda(\omega_1^{(0)}) \tau_{02} v_2 \sigma_2 q_2` + \tau_{02} v_2 \sigma_2 q``_2 + \lambda(\omega_2^{0)}) \tau_{03} v_3 \sigma_3 q_3` + \tau_{03} v_3 \sigma_3 q``_3$$

... и т.д.

Нетрудно видеть, что

$$\omega`_i{}^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_{j-1}{}^{(0)})\ \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{`} + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{``}_j\ ,$$

Для сохранения общности последнее соотношение перепишем в виде

$$\omega`_i{}^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j{}^{(0)})\ \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{`} + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{``}_j\ .$$

Так можно сделать, поскольку

$$\lambda(\omega_j{}^{(0)})\ \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{`} = \lambda(\omega_{j-1}{}^{(0)} + \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{`})\ \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{`}.$$

Полученное выражение эквивалентно

$$\omega`_i{}^{(0)} = \sum_{j=1}^{i} c`_j{}^{(0)} q_j^{`} + \sum_{j=1}^{i} c_j{}^{(0)} q^{``}_j.$$

4.2. Линейные ускорения

Продифференцируем $V_i{}^{(0)}$

$$V_i^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)})\ \tau_{0i}\ t_i + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\ \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q_j + l_j) + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q^{`}_j).$$

по времени.

Получим (с учетом дифференцирования векторов в подвижных СК) :

$$V`_i{}^{(0)} = \lambda(\omega`_i{}^{(0)})\ \tau_{0i}\ t_i + \underline{\lambda(\omega_i{}^{(0)})\ \tau`_{0i}\ t_i} + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega`_j{}^{(0)})\ \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q_j + l_j) +$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j{}^{(0)})\ \tau`_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q_j + l_j)} + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j{}^{(0)})\ \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q`_j) +$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{i} \tau`_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q`_j)} + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q``_j).$$

После подстановки в полученное выражение значений $\tau`_{0j}$ будем иметь:

$$V`_i{}^{(0)} = \lambda(\omega`_i{}^{(0)})\ \tau_{0i}\ t_i + \underline{\lambda(\omega_i{}^{(0)})\ \lambda(\omega_i{}^{(0)})\ \tau_{0i}\ t_i} + \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega`_j{}^{(0)})\ \tau_{0j}\ (v_j\,(1-\sigma_j)q_j + l_j) +$$

i *i*

$$\underline{\sum_{j=1} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q_j \;+\; l_j)} + \; [\sum_{j=1} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{`}_j) \;+$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{`}_j)]} \;+\; \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{``}_j).$$

Подставим в полученные выражения значения

$$\omega^{`(0)}_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{`}_j \;+\; \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, v_j \sigma_j q^{``}_j\,,$$

получим

$$V^{`(0)}_i = \lambda(\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega^{(0)})\, \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{`}_j \;+\; \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, v_j \sigma_j q^{``}_j)\, \tau_{0i}\, t_i \;+$$

$$\lambda(\omega_i^{(0)})\, \lambda(\omega_i^{(0)})\, \tau_{0i}\, t_i \;+$$

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda(\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\, \tau_{0k} v_k \sigma_k q^{`}_k \;+\; \sum_{k=1}^{j} \tau_{0k}\, v_k \sigma_k q^{``}_k)\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q_j \;+\; l_j) \;+$$

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q_j \;+\; l_j) + \; [\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{`}_j) \;+$$

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{`}_j)] \;+\; \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{``}_j).$$

Квадратные скобки можно сложить с множителем 2!

С другой стороны, согласно вышеизложенному

$$V^{`(0)}_i = \sum_{j=1}^{i} D^{`(0)}_{ij}\, q^{`}_j + \sum_{j=1}^{i} D_{ij}^{(0)}\, q^{``}_j.$$

Выражеие для $D_{ij}^{(0)}$ *мы получили ранее. Для того, чтобы полностью развернуть выражение для* $V^{`(0)}_i$ *нужно определить вид* $D^{`(0)}_{ij}\, q^{`}_j$.

НИЖЕ БОЛЕЕ ПРОСТОЙ ВАРИАНТ. Обратим внимание на 1-е, 3-е и последнее слагаемые в выражении для $V^{`(0)}_i$:

$$\lambda(\omega^{`(0)}_i)\, \tau_{0i}\, t_i \;+\; \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega^{`(0)}_j)\, \tau_{0j}(v_j\,(1-\sigma_j)q_j \;+\; l_j) + \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, (v_j\,(1-\sigma_j)q^{``}_j) =$$

$$\lambda\, (\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j} v_j \sigma_j q^{`}_j \;+\; \sum_{j=1}^{i} \tau_{0j}\, v_j \sigma_j q^{``}_j)\, \tau_{0i} t_i +$$

$$\sum_{k=1}^{i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`} + \sum_{j=1}^{k}\tau_{0j}v_j\sigma_j q^{``}_j\right)\tau_{0jk}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k) +$$

$$\sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q^{``}_j) =$$

(во втором слагаемом переименованы индексы j и k – для удобства дальнейших преобразований)

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}v_j\sigma_j q^{``}_j\right)\tau_{0i}t_i + \sum_{k=1}^{i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{k}\tau_{0j}v_j\sigma_j q^{``}_j\right)\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_j) + \sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q^{``}_j) +$$

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0i}t_i + \sum_{k=1}^{i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k) =$$

$$\sum_{j=1}^{i}\lambda(\tau_{0j}v_j\sigma_j)\,\tau_{0i}t_i\,q^{``}_j + \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{k}\lambda(\tau_{0j}v_j\sigma_j)\,\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)+q_k l_k)\,q^{``}_j + \sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)\,q^{``}_j +$$

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0i}t_i + \sum_{k=1}^{i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k) =$$

$$\sum_{j=1}^{i}D_{ij}^{(0)}q^{``}_j + \ldots\ .$$

(Мы воспользовались результатами вывода формулы линейной скорости звеньев).

Тогда $\sum_{j=1}^{i}D^{`}_{ij}{}^{(0)}q^{`}_j$ - это 2,4,5 слагаемые из выражения для $V^{`}_i{}^{(0)}$ + оставшиеся (…) слагаемые из последнего выражения, т.е.

$$\sum_{j=1}^{i}D^{`}_{ij}{}^{(0)}q^{`}_j = \lambda(\omega_i^{(0)})\,\lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}t_i +$$

$$\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j) + 2\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q^{`}_j) +$$

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0i}t_i + \sum_{k=1}^{i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q_j^{`}\right)\tau_{0k}(v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k).$$

ДРУГОЙ ВАРИАНТ ВЫКЛАДОК.

/* … Обратим внимание на 1-е, 3-е и последнее слагаемые в выражении для $V^{`}_i{}^{(0)}$:

$$\lambda(\omega`_i^{(0)})\,\tau_{0i}\,t_i\; + \;\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega`_j^{(0)})\,\tau_{0j}(v_j\,(1-\sigma_j)q_j\; + \;l_j) + \sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q``_j) =$$

$$\lambda\,(\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q`_j\; + \;\sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}\,v_j\sigma_j q``_j\,)\,\tau_{0i}t_i +$$

$$\sum_{k=1}^{i}\lambda\,(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q`_j\; + \;\sum_{j=1}^{k}\tau_{0j}\,v_j\sigma_j q``_j\,)\;\tau_{0j\,k}(v_k\,(1-\sigma_k)q_k + l_k) +$$

$$\sum_{j=1}^{i}\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q``_j).$$

В последнем равенстве 2-е, 3-е и 5-е слагаемые являются явными функциями $q``_j$. Но согласно

$$V`_i^{(0)}\; = \;\sum_{j=1}^{i}D`_{ij}^{(0)}\,q`_j + \sum_{j=1}^{i}D_{ij}^{(0)}\,q``_j$$

и эти слагаемые равны

$$\sum_{j=1}^{i}D_{ij}^{(0)}\,q``_j\,,$$

$$D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j}\,v_j\sigma_j)\,R_{ij}^{(0)}\; + \tau_{0j}\,v_j\,(1-\sigma_j)= \lambda(c_j^{(0)})\,R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j}\,v_j\,(1-\sigma_j),$$

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i}t_i + \sum_{k=1}^{i}\tau_{0k}\,(v_k\,(1-\sigma_k)q_k\; + \;l_k).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{i}D`_{ij}^{(0)}\,q`_j\; -$$

это все оставшиеся слагаемые, а именно (см. выше).

$$\lambda(\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q`_j\,)\,\tau_{0i}\,t_i\; + \;\;\lambda(\omega_i^{(0)})\,\lambda(\omega_i^{(0)})\,\tau_{0i}\,t_i\; +$$

$$+\sum_{k=1}^{i}\lambda(\sum_{j=1}^{k}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}v_j\sigma_j q`_j\,)\,\tau_{0k}\,(v_k\,(1-\sigma_k)q_k\; + \;l_k) +$$

$$\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q_j\; + \;l_j) + \;[\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q`_j)\; +$$

$$\sum_{j=1}^{i}\lambda(\omega_j^{(0)})\,\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q`_j)].$$

Или

$$\sum_{j=1}^{i} D`_{ij}^{(0)} q`_j =$$

$$\lambda(\sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j} v_j \sigma_j q`_j)\, \tau_{0i}\, t_i \; + \; \lambda^2(\omega_i^{(0)})\, \tau_{0i}\, t_i \; +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i} \lambda(\sum_{j=1}^{k} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j} v_j \sigma_j q`_j)\, \tau_{0k}\, (v_k\, (1-\sigma_k) q_k \; + \; l_k) \; +$$

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda^2(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\, (1-\sigma_j) q_j \; + \; l_j) \; + \; 2 \sum_{j=1}^{i} \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, (v_j\, (1-\sigma_j) q`_j).$$

В этих слагаемых каждая компонента содержит произведения производных обобщенных координат второй степени. Поэтому линейные ускорения звеньев ИМ линейно зависят от вторых производных обообщенных координат (зависимость задается векторами $D_{ij}^{(0)}$) и квардратично – от первых производных обобщенных координат ИМ.

Внимательное рассмотрение последнего выражения дает компоненты вида $2\Sigma\lambda(\omega_j^{(0)})\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q`_j)$ – ускорения Кориолиса, а также центробежные (пропорциональные вторым степеням производных одноименных координат вращательных пар и гироскопические ускорения (пропорциональные произведениям производных разноименных координат).

РАЗДЕЛ 2. ДИНАМИКА ИМ МР

1. Силы и моменты.

Рассматриваются силы и моменты, действующие на звенья и шарниры ИМ, а также силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора.

1.1. Силы, действующие на звенья ИМ

Введем следующие обозначения (рис.1.1):

$\mathbf{F}_{\text{в}\,i}$ – суммарный вектор внешних сил, приложенный к звену i, приведенный к центру масс звена i,

$\mathbf{F}_{\text{и}\,i}$ – вектор сил инерции i-го звена (приложен к центру масс звена i),

$\mathbf{f}_i$ **–** вектор сил реакции, приложенный к звену i в месте сочленения звеньев i-1 и i (в точке, совпадающей с центром $СК_{i-1}$).

$\mathbf{f}_i$ **–** вектор сил реакции, приложенный к звену i-1 в месте сочленения звеньев i-1 и i.

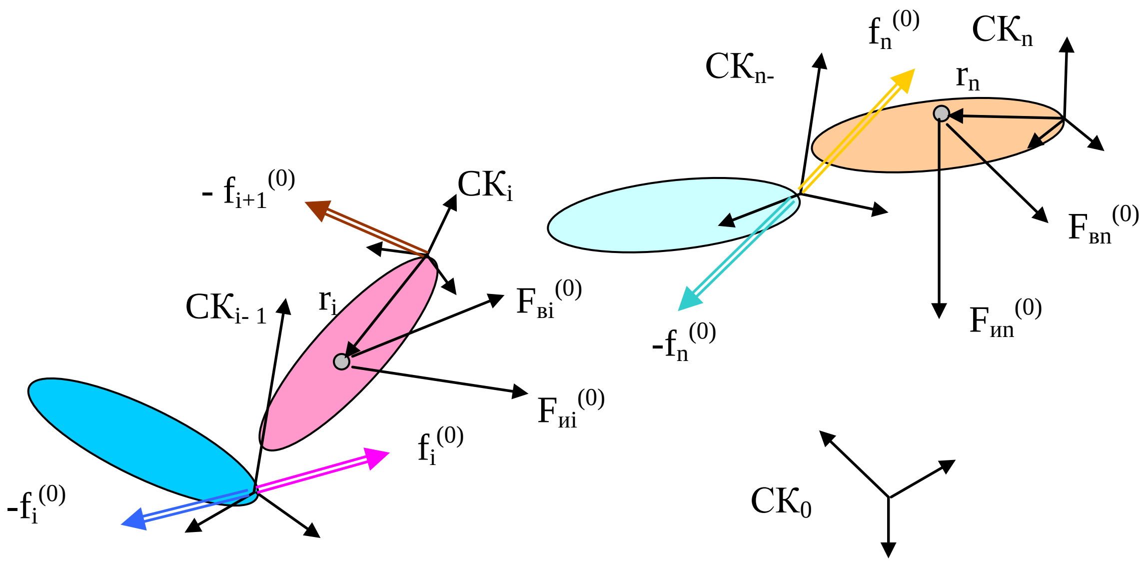


Рис.1.1. Силы, действующие на звенья ИМ.

НИЖЕ БОЛЕЕ ПРОСТОЙ ВАРИАНТ. Составим уравнения кинето-статического равновесия каждого из тел под действием внешних сил, сил реакций и сил инерции. В проекциях на оси СК$_0$:

$$
\begin{cases}
F_{вn}^{(0)} + F_{иn}^{(0)} + f_n^{(0)} = 0, \\
F_{вn-1}^{(0)} + F_{иn-1}^{(0)} + f_{n-1}^{(0)} - f_n^{(0)} = 0, \\
\quad \ldots \\
F_{вi}^{(0)} + F_{иi}^{(0)} + f_i^{(0)} - f_{i+1}^{(0)} = 0, \\
\quad \ldots \\
F_{в1}^{0)} + F_{и1}^{(0)} + f_1^{(0)} - f_2^{(0)} = 0.
\end{cases}
$$

Из всех сил, действующих на каждое из звеньев незвестны только силы реакции. Выполнив последовательно, начиная от звена n, подстановку значений сил реакции в уравнения для n-1, n-2, …1 звеньев, получим последовательно:

$$
\begin{cases}
f_n^{(0)} = - (F_{вn}^{(0)} + F_{иn}^{(0)}), \\
f_{n-1}^{(0)} = - (F_{вn-1}^{(0)} + F_{иn-1}^{(0)}) + f_n^{(0)}, \\
\quad \ldots \\
f_i^{(0)} = - (F_{вi}^{(0)} + F_{иi}^{(0)}) + f_{i+1}^{(0)} = 0, \\
\quad \ldots \\
f_1^{(0)} = - (F_{в1}^{0)} + F_{и1}^{(0)}) + f_2^{(0)} = 0
\end{cases}
$$

и

$$f_i^{(0)} = -\sum_{j=i}^{n} (F_{вj}^{(0)} + F_{иj}^{(0)}),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Выражение для $F_{иj}^{(0)}$ имеет вид

$$F_{иj}^{(0)} = -\ m_j V`^{(0)}_j$$

поэтому

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^{n} (m_j V`^{(0)}_j - F_{вj}^{(0)}),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Полученныве выражения совместно с выражениями для $V`^{(0)}_j$ позволяют определить силы, действующие на звенья ИМ при его движении. Из них следует, что к звену i приложены все внешние силы, действующие на звенья с номерами от i до n, а также - силы инерции, обусловленные движением всех звеньев ИМ. На первое звено ИМ действуют все внешние силы и силы инерции всех звеньев. Сила реакции со стороны основания ИМ (действует на первое звено) равна $f_1^{(0)}$. ИМ воздействует на основание с силой $(-f_1^{(0)})$.

Замечание. Перед подстановкой в выражение для $f_i^{(0)}$ в формулы для расчета $V`^{(0)}_j$ следует положить $t_j = r_j$.

/* ДРУГОЙ ВАРИАНТ ВЫКЛАДОК

Рассмотрим участок кинематической цепи, начиная от звена i. Согласно принципу Даламбера этот участок кинемсатической цепт находтся в равновесии под действием всех внешних сил и всех сил инерции, действующих на звенья от i до n и сил реакции связей действующих на звено i, что эквивалентно записи

$$f_i^{(0)} + \sum_{j=i}^{n} (F_{вj}^{(0)} + F_{иj}^{(0)}) = 0,$$

$i = 1,2,\ldots,n,$

или

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^{n} (m_j V`^{(0)}_j - F_{вj}^{(0)}),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$
***/**

1.2. Моменты, действующие на звенья ИМ.

Введем следующие обозначения (рис.3.2):
$\mathbf{M}_{\text{в}\,i}$ – суммарный внешний момент, приложенный к звену i,
$\mathbf{M}_{\text{и}\,i}$ – вектор моментов сил инерции i-го звена (приложен к центру масс звена i),
$\boldsymbol{\mu}_i$ – вектор моментов сил реакции в месте сочленения звеньев i-1 и i, приложенный к звену i (к звену i-1 приложен равный по величине и противоположный по знаку вектор).

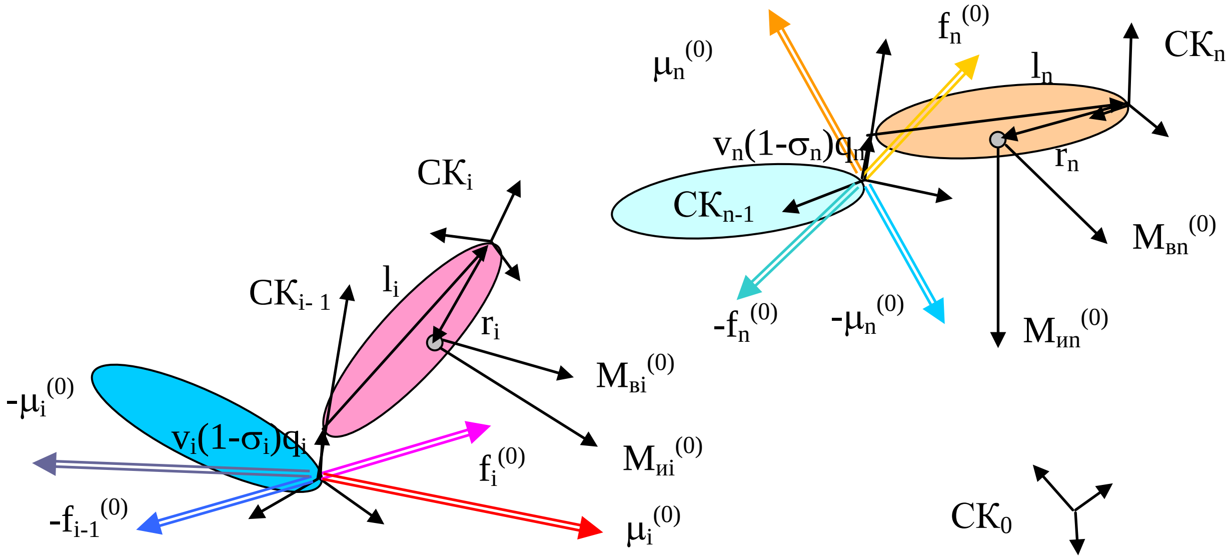


Рис.1.2. Моменты, действующие на звенья ИМ.

НИЖЕ БОЛЕЕ ПРОСТОЙ ВАРИАНТ. Составим уравнения кинето-статического равновесия каждого из тел под действием внешних моментов, моментов реакции и моментов сил инерции. В проекциях на оси $СК_0$:

$$M_{вn}^{(0)} + M_{иn}^{(0)} + \mu_n^{(0)} - \lambda(\tau_{0n}(v_n(1-\sigma_n)q_n + l_n + r_n))\, f_n^{(0)} = 0,$$
$$M_{вn-1}^{(0)} + M_{иn-1}^{(0)} + \mu_{n-1}^{(0)} - \mu_n^{(0)} -$$
$$\lambda(\tau_{0n-1}(v_{n-1}(1-\sigma_{n-1})q_{n-1} + l_{n-1} + r_{n-1}))\, f_{n-1}^{(0)} + \lambda(-\tau_{0n-1} r_{n-1})(-f_n^{(0)}) = 0,$$
…
$$M_{вi}^{(0)} + M_{иi}^{(0)} + \mu_i^{(0)} - \mu_{i+1}^{(0)} -$$
$$\lambda(\tau_{0i}(v_i(1-\sigma_i)q_i + l_i + r_i))\, f_i^{(0)} + \lambda(\tau_{0i} r_i)\, f_{i+1}^{(0)} = 0,$$
…
$$M_{в1}^{(0)} + M_{и1}^{(0)} + \mu_1^{(0)} - \mu_2^{(0)} -$$
$$\lambda(\tau_{01}(v_1(1-\sigma_1)q_1 + l_1 + r_1))\, f_1^{(0)} + \lambda(\tau_{01} r_1)\, f_2^{(0)} = 0.$$

Из всех моментов, действующих на каждое из звеньев незвестны только моменты реакции. Выполнив последовательно, начиная от звена n, подстановку значений моментов реакции в уравнения для n-1, n-2, …1 звеньев, получим последовательно:

$$\mu_n^{(0)} = -(M_{вn}^{(0)} + M_{иn}^{(0)}) + \lambda(\tau_{0n}(v_n(1-\sigma_n)q_n + l_n + r_n))\, f_n^{(0)},$$
$$\mu_{n-1}^{(0)} = -(M_{вn-1}^{(0)} + M_{иn-1}^{(0)}) + \mu_n^{(0)} +$$
$$\lambda(\tau_{0n-1}(v_{n-1}(1-\sigma_{n-1})q_{n-1} + l_{n-1} + r_{n-1}))\, f_{n-1}^{(0)} - \lambda(\tau_{0n-1} r_{n-1})\, f_n^{(0)},$$

$$\ldots$$

$$\mu_i^{(0)} = -(M_{вi}^{(0)} + M_{иi}^{(0)}) + \mu_{i+1}^{(0)} +$$
$$\lambda(\tau_{0i}(v_i(1-\sigma_i)q_i + l_i + r_i))\, f_i^{(0)} - \lambda(\tau_{0i} r_i)\, f_{i+1}^{(0)},$$

$$\ldots$$

$$\mu_1^{(0)} = -(M_{в1}^{(0)} + M_{и1}^{(0)}) + \mu_2^{(0)} +$$
$$\lambda(\tau_{01}(v_1(1-\sigma_1)q_1 + l_1 + r_1))\, f_1^{(0)} - \lambda(\tau_{01} r_1)\, f_2^{(0)}.$$

и

$$\mu_n^{(0)} = -(M_{вn}^{(0)} + M_{иn}^{(0)}) + \lambda(\tau_{0n}(v_n(1-\sigma_n)q_n + l_n + r_n))\, f_n^{(0)},$$

$$\mu_{n-1}^{(0)} = -\sum_{j=n-1}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) +$$
$$\sum_{j=n-1}^{n}\lambda(\tau_{0j}(v_{nj}(1-\sigma_j)q_j + l_j + r_j))\, f_j^{(0)} - \lambda(\tau_{0n-1} r_{n-1})\, f_n^{(0)},$$

$$\ldots$$

$$\mu_i^{(0)} = -\sum_{j=i}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n}\lambda(\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j + r_j))\, f_j^{(0)} - \sum_{j=i}^{n-1}\lambda(\tau_{0j} r_j)\, f_{j+1}^{(0)},$$

$$\ldots$$

$$\mu_1^{(0)} = -\sum_{j=1}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda(\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j + r_j))\, f_j^{(0)} - \sum_{j=1}^{n-1}\lambda(\tau_{0j} r_j)\, f_{j+1}^{(0)}.$$

Учитывая, что

$$f_j^{0)} = -\sum_{k=j}^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}),$$

запишем выражение для $\mu_i^{(0)}$:

$$\mu_i^{(0)} = -\sum_{j=i}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) -$$

$$\sum_{j=i}^{n}\lambda(\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j + r_j))\sum_{k=j}^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n-1}\lambda(\tau_{0j} r_j)\sum_{k=j+1}^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}) =$$

$$-\sum_{j=i}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) - \sum_{j=i}^{n}\lambda(\tau_{0j}(v_j(1-\sigma_j)q_j + l_j)\sum_{k=j}^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}) -$$

$$\sum^{n}\lambda(\tau_{0j} r_j)\sum^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}) + \sum^{n-1}\lambda(\tau_{0j} r_j)\sum^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}).$$

$$\sum_{j=i} \qquad \sum_{k=j} \qquad\qquad \sum_{j=i} \qquad \sum_{k=j+1}$$

Сумма двух последних слагаемых дает

$$-\sum_{j=i}^{n} \lambda(\tau_{0j}\, r_j)\,(F_{вj}^{(0)} + F_{иj}^{(0)})\,.$$

В самом деле:

$$-\sum_{j=i}^{n}(_j)\sum_{k=j}^{n}(_k) \quad + \quad \sum_{j=i}^{n-1}(_j)\sum_{k=j+1}^{n}(_k) \quad = \quad -\sum_{j=i}^{n}(_j)\,(_{k=j}).$$

j = i   k = i,i+1,…,n   j = i   k = i+1,i+2,…,n
j = i +1   k =   i+1,…,n   j = i+1   k =   i+2,…,n
…
j = n -1   k =   n-1,n   j = n-1   k =   n
j = n   k =   n

После вычитания
j = i   k = i= j
j = i +1   k =   i+1 = j
…
j = n -1   k = n-1 = j
j = n   k = n = j.

С учетом этого выражение для $\mu_i^{(0)}$ примет вид:

$$\mu_i^{(0)} = -\sum_{j=i}^{n}(M_{вj}^{(0)} + M_{иj}^{(0)}) - \sum_{j=i}^{n}\lambda(\tau_{0j}\,(v_j\,(1-\sigma_j)q_j + l_j))\sum_{k=j}^{n}(F_{вk}^{(0)} + F_{иk}^{(0)}) -$$

$$\sum_{j=i}^{n}\lambda(\tau_{0j}\, r_j)\,(F_{вj}^{(0)} + F_{иj}^{(0)}).$$

i = 1,2,…,n.

Выражение для $M_{иj}^{(0)}$ имеет вид:

$$M_{иj}^{(0)} = -\,(I_j\,\grave{\omega}_j)^{(0)} - \lambda(\omega_j^{(0)})\,(I_j\,\omega_j)^{(0)}.$$

В последнем соотношении обозначено $(I_j\omega_j)^{(0)}$ – вектор момента количества движения звена j в $СК_0$. Его можно представить еще и так:

$$(I_j\,\omega_j)^{(0)} = \tau_{0j}\,(I_j\,\tau_{j0}\,\omega_j^{(0)}) = (\tau_{0j}\,I_j\,\tau_{j0})\omega_j^{(0)} = I_j^{(0)}\,\omega_j^{(0)},$$

где $I_j^{(0)} = \tau_{0j}\ I_j\ \tau_{j0}$ - тензор инерции звена j в системе коодринат, оси которой параллельны осям $СК_0$, а начало совмещено с центром масс звена j. Аналогично $(I_j\,\grave{\omega}_j)^{(0)} = I_j^{(0)}\,\grave{\omega}_j^{(0)}$.

Справедливость выражения
$I_j^{(0)} = \tau_{0j}\, I_j\, \tau_{j0}$
Следует из того, что

$$I^{(0)}{}_j = \Sigma_{\nu\, i}\ \lambda(r^{(0)}{}_{\nu\, i})\, m_{\nu i}\, \lambda^T(r^{(0)}{}_{\nu\, i}) = \Sigma_{\nu\, i}\ \lambda(\tau_{0j}\, r_{\nu\, i})\, m_{\nu i}\, \lambda^T(\tau_{0j}\, r_{\nu\, i}) =$$

$$\Sigma_{\nu\, i}\ \tau_{0j}\, \lambda(r_{\nu\, i})\, \tau_{j0}\ m_{\nu i}\ \tau_{0j}\, \lambda^T(r_{\nu\, i})\, \tau_{j0} = \tau_{0j}\ \{\Sigma_{\nu\, i}\ \lambda(r_{\nu\, i})\, m_{\nu i}\, \lambda^T(r_{\nu\, i})\}\ \tau_{j0} = \tau_{0j}\, I_j\, \tau_{j0}\,.$$

Диагональные элементы матрицы I_i - моменты инерции звена i относительно осей $СК_{ic}$; недиагональные элементы – смешанные моменты инерции.

Подставив соотношение для $M_{иj}^{(0)}$ в формулу для расчета $\mu_i^{(0)}$, получим:

$$\mu_i^{(0)} = \sum_{j=i}^{n} (I_j^{(0)}\, \grave{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)}\, \omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} \lambda(\tau_{0j}\, (v_j\, (1-\sigma_j)q_j + l_j) \sum_{k=j}^{n} (m_k\, \grave{V}_k^{(0)} - F_{вk}^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} \lambda(\tau_{0j}\, r_j)\, (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}),$$

i = 1,2,…,n.

Последнее выражение можно преобразовать. Рассмотрим отдельно второе и третье слагаемые в этом выражении. Во втором слагаемом переменим обозначения (j<->k) для индексов суммирования, а затем изменим порядок суммирования:

$$\sum_{k=i}^{n} \lambda(\tau_{0k}\, (v_k\, (1-\sigma_k)q_k + l_k) \sum_{j=k}^{n} (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n} \lambda(\tau_{0j}\, r_j)\, (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) =$$

k = i j = i, i+1,…,n
k = i+1 j = i+1,…,n -> j = i,…,n; k = i,…,j.
…
k = n j = n

$$\sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} \lambda(\tau_{0k}\, (v_k\, (1-\sigma_k)q_k + l_k)\, (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n} \lambda(\tau_{0j}\, r_j)\, (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) =$$

$$\sum_{j=i}^{n} \lambda\, (\, \sum_{k=i}^{j}\tau_{0k}\, (v_k\, (1-\sigma_k)q_k + l_k) + \tau_{0j}\, r_j\,)\, (m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) = \sum_{j=i}^{j} \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j\, \grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$R_{ji}^{(0)} = \tau_{0j}t_j + \sum_{k=i}^{j} \tau_{0k}\,(v_k\,(1-\sigma_k)q_k + l_k)$$

и тем, что $t_j = r_j$.

С учетом выполненных преобразований выражение для расчета моментов реакции связей примет вид:

$$\mu_i^{(0)} = \sum_{j=i}^{n} (I_j^{(0)}\,\omega`_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\,I_j^{(0)}\,\omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)} + \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j\,V`_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)})).$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

ДРУГОЙ ВАРИАНТ ВЫКЛАДОК

/*

Рассмотрим участок кинематической цепи, начиная от звена i. Согласно принципу Даламбера этот участок кинемсатической цепт находтся в равновесии под действием всех внешних сил и всех сил инерции, действующих на звенья от i до n и сил реакции связей действующих на звено i, что эквивалентно записи

$$\mu_i^{(0)} + \sum_{j=i}^{n} (M_{иj}^{(0)} + M_{вj}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n}\lambda(R_{ji}^{(0)})(F_{иj} + F_{вj}^{(0)}) = 0,$$

где

$$R_{ji}^{(0)} = \tau_{0j}t_j + \sum_{k=i}^{j} \tau_{0k}\,(v_k\,(1-\sigma_k)q_k + l_k)$$

Учитывая¸что

$$M_{иj}^{(0)} = -\,I_j^{(0)}\,\omega`_j^{(0)} - \lambda(\omega_j^{(0)})\,I_j^{(0)}\,\omega_j^{(0)},$$

$$F_{иj}^{(0)} = -\,m_j\,V`^{(0)}_j$$

получим

$$\mu_i^{(0)} = \sum_{j=i}^{n} (I_j^{(0)}\,\omega`_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\,I_j^{(0)}\,\omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)} + \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j\,V`_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)})).$$

***/**

Геометрический смысл векторов $R_{ji}^{(0)}$ был рассмотрен выше.

Последние выражения совместно с выражениями для расчета $\omega_j^{(0)}$, $\omega`_j^{(0)}$ позволяют определить моменты, действующие на звенья ИМ при его движении.

Можно видеть, что к звену i приложены все внешние моменты, действующие на звенья с номерами от i до n, а также моменты сил инерции, обусловленные движением всех звеньев ИМ. На первое звено ИМ действуют все внешние моменты и моменты сил инерции всех звеньев. Момент реакции со стороны основания ИМ (действует на первое звено) равен $\mu_1^{(0)}$. ИМ воздействует на основание с моментом $(-\mu_1^{(0)})$.

1.3. Силы, действующие вдоль осей шарниров ИМ.

Ось шарнира с номером i совпадает с осью $Z_{i-1.}$ Поэтому для определения сил, действующих вдоль осей шарниров следует, во-первых, векторы сил реакций связей перевести в системы из $СК_0$ в СК $_{i-1}$, а во-вторых, спроецировать получившиеся векторы на оси Z_{i-1}:

$$f_{Zi}^{(i-1)} = e^T \tau_{i-1i}\, \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} (m_j V`^{(0)}_j - F_{вj}^{(0)}) = v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} (m_j V`^{(0)}_j - F_{вj}^{(0)}),$$

поскольку $e^T \tau_{i-1i} = v_i^T$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

(ранее писали $\tau_{i\,i-1}e = \nu_i$ - вектор проекций орта z_{i-1} на оси $СК_i$
$\tau_{0i-1}\, e = \tau_{0i-1}\, \tau_{i-1i}\, \tau_{i\,i-1}e = \tau_{0i}\, \tau_{i\,i-1}e = \tau_{0i}\, \varepsilon^T_i\, \tau^T_z(\sigma_i q_i)\, e = \tau_{0i}\, \varepsilon^T_i\, e = \tau_{0i}\, \nu_i$, где $\nu_i = \varepsilon^T_i\, e$).

1.4. Моменты, действующие вдоль осей шарниров.

Для определения моментов, действующих вдоль осей шарниров следует, во-первых, векторы моментов реакций связей перевести из $СК_0$ в СК $_{i-1}$, а во-вторых, спроецировать получившиеся векторы на оси Z_{i-1}:

$$\mu_{Zi}^{(i-1)} = v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} (I_j^{(0)} \omega`_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)}) +$$

$$v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j V`_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Силы и моменты, с которыми ИМ воздействует на оси шарниров равны соответственно $-f_{Zi}^{(i-1)}$, $-\mu_{Zi}^{(i-1)}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

1.5. Силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора. Обратная задача динамики ИМ.

Силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора, определяются из выражений (3.5), если соответствующий шарнир поступательного типа или из выражений (3.6), если шарнир вращательного типа.

Для того, чтобы учесть тип шарнира воспользуемся множителями-индикаторами σ_i. Обозначим

$$\mu_{дi} = (1 - \sigma_i) * \text{сила, развиваемая i-м приводом} + \sigma_i * \text{момент, развиваемый i-м приводом.}$$

Силы и моменты, развиваемые приводами, действуют вдоль осей шарниров. Их значения определяются по выражениям п.1.3, если соответствующий шарнир поступательного типа, или по выражениям п.1.4, если шарнир вращательного типа. Нужно помнить, что сила (или момент) привода с номером i действует вдоль оси Z СК $_{i-1}$. Тогда

$$\mu_{дi} = (1 - \sigma_i)\, f_{Zi}^{(i-1)} + \sigma_i\, \mu_{Zi}^{(i-1)}.$$

Подставив в последнее выражение значения сил и моментов, развиваемых приводами, получим

$$(1 - \sigma_i)\, v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} (m_j V\grave{}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) +$$

$$\sigma_i\, v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} (I_j^{(0)} \omega\grave{}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)}) +$$

$$\sigma_i\, v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^{n} \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j V\grave{}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) = \mu_{дi},$$

$i = 1,2,\ldots,n$

Заметим, что а) $\sigma_i\, v_i^T \tau_{i0} = c_i^{(0)\,T}$, б) $(1 - \sigma_i)\, v_i^T \tau_{i0} + \sigma_i\, v_i^T \tau_{i0}\, \lambda(R_{ji}^{(0)}) = D_{ji}^{(0)\,T}$.

Замечание а) очевидно (устанавливаем сравнением с полученными выше выражениями для $c_i^{(0)}$). Для того, чтобы убедиться в справедливости замечания б) проделаем следующие операции над $D_{ji}^{(0)}$:

$$(D_{ji}^{(0)})^T = ((1 - \sigma_i)\, v_i^T \tau_{i0} + \sigma_i\, v_i^T \tau_{i0}\, \lambda(R_{ji}^{(0)}))^T = \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i) + \lambda^T(R_{ji}^{(0)})\tau_{0i} v_i \sigma_i =$$

$$\tau_{0i} v_i (1-\sigma_i) - \lambda(R_{ji}^{(0)})\tau_{0i} v_i \sigma_i = \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i) + \lambda(\tau_{0i} v_i \sigma_i)\, R_{ji}^{(0)} = D_{ji}^{(0)}$$

С учетом этого выражение для сил и моментов приводов представим в виде :

$$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T} (I_j^{(0)} \omega\grave{}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} (m_j V\grave{}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)}) = \mu_{дi}.$$

Последнее уравнение совместно с полученными ранее выражениями для $\omega\grave{}_j^{(0)}$, $\omega_j^{(0)}$, $V\grave{}_j^{(0)}$ позволяют определить силы и (или) моменты, которые развивают приводы при известных параметрах движения звеньев ИМ (q_i, $q\grave{}_i$, $q\grave{}\grave{}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Определение сил и (или) моментов, развиваемых приводами по заданным параметрам движения носит название **обратнай задачи динамики (ОЗД) ИМ**.

Отметим, что произведение каких-либо двух векторов вида $a^{(\$)T}b^{(\$)}$ есть координатная запись скалярного произведения векторов **a** и **b**, представленных в проекциях на оси СК$_\$$, т.е. векторов $a^{(\$)}$ и $b^{(\$)}$. Исходя из этого момент (или сила) воздействующие на i-й привод ИМ есть сумма скалярных произведений векторов $c_i^{(0)}$ и $I_j^{(0)}\,\grave{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)})\,I_j^{(0)}\,\omega_j^{(0)} - M_{вj}^{(0)}$ (j = i,…,n) плюс сумма скалярных произведений векторов $D_{ji}^{(0)}$ и $(m_j\,\grave{V}_j^{(0)} - F_{вj}^{(0)})$ (j = i,…,n).

1.6. Уравнения статического равновесия ИМ.

Положим $\grave{\omega}_j^{(0)} = \grave{V}_j^{(0)} = \omega_j^{(0)}$ для всех j (ИМ неподвижен). Тогда из последнего уравнения п.1.5 следует:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}\,M_{вj}^{(0)} + \sum\limits_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T}\,F_{вj}^{(0)} + \mu_{дi} = 0, \\ (\text{если } \grave{\omega}_j^{(0)} = \grave{V}_j^{(0)} = \omega_j^{(0)} = 0,\ j = 1,\ldots,n). \end{cases}$$

1.7. Симметрия уравнений ОЗД и уравнений для определения скоростей звеньев ИМ.

Для расчета сил (моментов) приводов и скоростей звеньев ИМ можно использовать **одни те же компоненты** – векторы $c_i^{(0)}$ $D_{ij}^{(0)}$ (i = 1,2,…n, j = 1,2,…i), причем в уравнения сил (моментов) эти векторы входят в транспонированном виде.

1.8. Управление по вектору силы

Уравнения п.1.6 запишем для случая, когда внешние силы и моменты приложены только к последнему звену ИМ

$$c_i^{(0)\,T}\,M_{в\,n}^{(0)} + D_{ni}^{(0)T}\,F_{вn}^{(0)} + \mu_{дi} = 0.$$

Составим блочный вектор

$M_{в\,n}^{(0)}$
$F_{вn}^{(0)}$

(размер вектора 6x1)
и вектор

$\mu_д = [\mu_{дi}\ ]$

Сваязь между введенными в рассмотрение векторами устанавливает соотношение

$\mu_{д1}$ | $c_1^{(0)\,T}\ D_{n1}^{(0)T}$ |

$$\mu_{д2} \quad = \; - \quad c_2^{(0)\,T} \; D_{n2}^{(0)T} \quad \begin{matrix} M_{в\,n}^{(0)} \\ F_{вn}^{(0)} \end{matrix}$$

…

$$\mu_{дn} \qquad c_n^{(0)\,T} \; D_{nn}^{(0)T}$$

Видно, что матрица в правой части – транспорнированная матрица-якобиан (п.).

Последнее выражение определяет знгачения сил (моментов), которые должны развивать приводы для обеспечения равновесия ИМ под действием внешних сил и моментов, приложенных к последнему звену ИМ.

Из этого же выражения следует, что для того, чтобы определить силу $F_{вп}^{(0)}$ и момент $M_{в\,n}^{(0)}$, которые должен развивать МР на последнем звене, необходимо в последнм уравнении поменять знак минус на знак плюс.

Получившееся после смены знака выражение определяет закон управления МР по вектору силы.

2. Уравнения движения ИМ МР

2.1. Вывод уравнений движения

Уравнения движения ИМ позволяют определить параметры движения ИМ (q_i, $\dot{q}_i$, $q``_i$, $i = 1,2,\dots,n$) по известным силам и моментам, развиваемым приводами, а также по известным внешним силам и моментам. Решение этих уравнений определяет сущность **прямой задачи динамики ИМ** (часто говорят «задача динамики ИМ»). Для того, чтобы решить прямую задачу динамики ИМ, нужно составить соотношения, связывающие между собой $\mu_{дi}$, $F_{вj}$, $M_{вj}$ и искомые параметры движения ИМ и разрешить их относительно искомых переменных. Теперь для этого подставим в последнее выражение п.1.5 выражения для расчета $\omega`_j^{(0)}$ и $V`_j^{(0)}$ и разрешим полученные соотношения относительно старших производных q_i .

Выполним эту подстановку:

$$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} \,(\sum_{k=1}^{j} c`_k^{(0)} q_k` + \sum_{k=1}^{j} c_k^{(0)} q``_k) + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)}\, \omega_j^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j \,(\sum_{k=1}^{j} D`_{jk}^{(0)} q`_k + \sum_{k=1}^{j} D_{jk}^{(0)} q``_k) \;=\; \mu_{дi} + \sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}{}_{.}\, M_{вj}^{(0)} + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T}\, F_{вj}^{(0)}.$$

$$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} \,(\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\;\; \tau_{0k} v_k \sigma_k q_k` \;+\; \sum_{k=1}^{j} \tau_{0k}\, v_k \sigma_k q``_k\,) + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)}\, \omega_j^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j \,(\sum_{k=1}^{j} D`_{jk}^{(0)} q`_k + \sum_{k=1}^{j} D_{jk}^{(0)} q``_k) \;=\; \mu_{дi} + \sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}{}_{.}\, M_{вj}^{(0)} + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T}\, F_{вj}^{(0)}.$$

Обозначим сумму слагаемых в левой части полученного соотношения, содержащих производные обобщенных координат в первой степени, а также $\omega_j^{(0)}$ как b_i, т.е.

$$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T} \left(I_j^{(0)} \sum_{k=1}^{j} c`_k^{(0)} q`_k + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)} \omega_j^{(0)}\right) + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j \sum_{k=1}^{j} D`_{jk}^{(0)} q`_k = b_i.$$

Оставшиеся слагаемые в левой части рассматривемого соотношения, содержащие вторые производные обобщенных координат, преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} \sum_{k=1}^{j} c_k^{(0)} q``_k + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j \sum_{k=1}^{j} D_{jk}^{(0)} q``_k =$$

$$\sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{j} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} c_k^{(0)} q``_k + \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{j} D_{ji}^{(0)T} m_j\; D_{jk}^{(0)} q``_k =$$

j = i k = 1,2,…,i.
j = i+1 k = 1,2,…,i, i+1. -> k = 1,…,n, j = i,…,n при k ≤ i
… … j = k,…,n при k > i
j = n k = 1,2,…,i,i+1, … , n

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \le i \\ j=k \text{ if } k > i}}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} c_k^{(0)} q``_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \le i \\ j=k \text{ if } k > i}}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j\; D_{jk}^{(0)} q``_k\,.$$

Переименуем индексы (j<->k) и сгруппируем подобные члены:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \le i \\ j=k \text{ if } k > i}}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_j^{(0)} c_k^{(0)} q``_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \le i \\ j=k \text{ if } k > i}}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j\; D_{jk}^{(0)} q``_k =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \le i \\ k=j \text{ if } j > i}}^{n} c_i^{(0)\,T}\; I_k^{0)} c_j^{0)} q``_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \le i \\ k=j \text{ if } j > i}}^{n} D_{ki}^{(0)T} m_k\, D_{kj}^{(0)} q``_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q``_j,$$

где обозначено:

$$a_{ij} = \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \le i \\ k=j \text{ if } j > i}}^{n} \left(c_i^{(0)\,T}\; I_k^{(0)} c_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} m_k\, D_{kj}^{(0)}\right) = \sum_{k=\max(i,j)}^{n} \left(c_i^{(0)\,T}\; I_k^{(0)} c_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} m_k\, D_{kj}^{(0)}\right). \quad (4.3)$$

С учетом выполненных преобразований и введенных обозначений первое выражение п.2.1 примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \ddot{q}_j + b_i = \mu_{дi} + \sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T} M_{вj}^{(0)} + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)\,T} F_{вj}^{(0)},$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Полученная система дуравнений описывает движение ИМ под действием внешних сил и моментов, а также сил и (или) моментов, развиваемых приводами шарниров. Физический смысл каждого из слагаемых в этом выражении – силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \ddot{q}_j$ - часто называют “инерционными “ силами или моментами, с которыми ИМ воздействует на оси шарниров,

b_i – центробежные и кориолисовы силы и моменты, воздействующие на оси шарниров,

$\sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T} M_{вj}^{(0)}$ – моменты, воздействующие на оси шарниров; обусловлены внешними моментами, приложенными к звеньям ИМ,

$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)\,T} F_{вj}^{(0)}$ – силы и моменты, воздествиующие на оси шарниров; обусловлены внешними силами, приложенными к звеньям ИМ,

$\mu_{дi}$ – силы и моменты, развиваемые приводами ИМ.

Последнюю систему можно представить в виде одного уравнения, если обозначить

$A = \{a_{ij}\}$ – матрица (nxn) при вторых производных обобщенных координат ИМ (матрица инерционных коэффициентов, матрица инерции ИМ),

$b = [b_i\ ]$ – вектор (nx1), ($i = 1,2,\ldots,n$),

$C^{(0)} = \{c_j^{(0)}\}$ – матрица (3nxn) (см. п.2.5.2),

$D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$ – матрица (3nxn) (см. п.2.9),

$\mu_д = [\mu_{дi}]$, вектор (nx1), $i = 1,2,\ldots,n$,

$M_в^{(0)} = [M_{в1}^{(0)T}\, M_{в2}^{(0)T}\ \ldots\ M_{вn}^{(0)T}\ ]^T$ – вектор (3nxn) с компонентами $M_{вj}^{(0)}$,

$F_в^{(0)} = [F_{в1}^{(0)T}\, F_{в2}^{(0)T}\ \ldots\ F_{вn}^{(0)T}\ ]^T$ - вектор (3nxn) с компонентами $F_{вj}^{(0)}$.

Воспользовавшись сделанными обозначениями, получим:

$$A\, \ddot{q} + b = \mu_д + C^{(0)T} M_в^{(0)} + D^{(0)\,T} F_в^{(0)}.$$

2.2. Свойства матрицы A = { a_{ij} }

а) Элемент a_{ij} есть:

сумма из (n - max(i,j) +1) скалярных произведений вектора $c_i^{(0)}$ и вектора $c_j^{(0)}$, взятых с $I_k^{(0)}$ как с весовыми матрицами, причем k приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона $\max(i,j) \le k \le n$

плюс

сумма из (n - max(i,j) +1) скалярных произведений векторов $D_{ki}^{(0)}$ и векторов $D_{kj}^{(0)}$, взятых с m_k как с весовыми множителями, причем k приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона $\max(i,j) \le k \le n$.

Действительно, по свойству скалярного произведения

$$c_i^{(0)\,T}\, I_k^{(0)}\, c_j^{(0)} = c_i^{(0)} \cdot (I_k^{(0)}\, c_j^{(0)}),$$
$$D_{ki}^{(0)T}\, m_k\, D_{kj}^{(0)} = D_{ki}^{(0)} \cdot (m_k\, D_{kj}^{(0)}).$$

Число слагаемых в суммах и диапазоны суммирования легко устанавливаются из (4.3). Свойство а) удобно проиллюстрировать геометрически (рис.4.1 – случай i>j):

б) А – симметрическая матрица. Для этого нужно доказать, что $a_{ij} = a_{ji}$; а для этого достаточно показать, что

$$c_i^{(0)\,T}\, I_k^{(0)}\, c_j^{(0)} = c_j^{(0)\,T}\, I_k^{(0)}\, c_i^{(0)} \quad \text{и} \quad D_{ki}^{(0)T}\, m_k\, D_{kj}^{(0)} = D_{kj}^{(0)T}\, m_k\, D_{ki}^{(0)}.$$

Поскольку $c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)}$ – скаляр, то $(c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)})^T = c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)}$. С другой стороны выполнение предписанных действий транспонирования над $(c_i^{(0)T}\, I_k^{(0)}\, c_j^{(0)})^T$ дает $c_j^{(0)\,T}\, I_k^{(0)T}\, c_i^{(0)} = c_j^{(0)T} I_k^{(0)T}\, c_i^{(0)}$, что и служит доказательством.
Доказательство для $D_{ki}^{(0)T}\, m_k\, D_{kj}^{(0)}$ полностью аналогично.

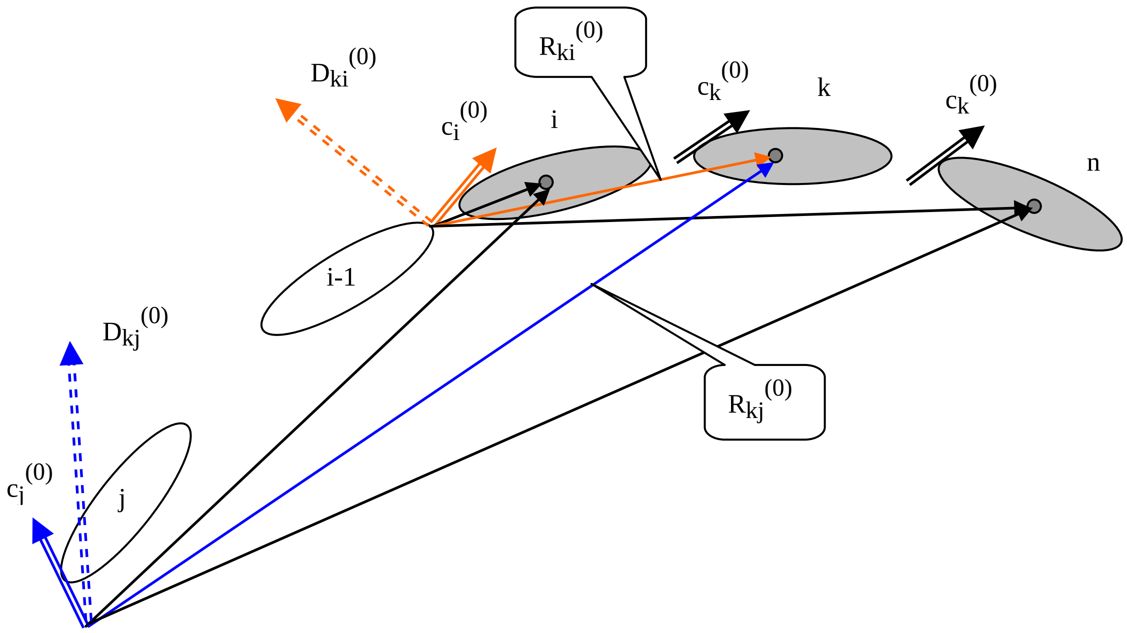


Рис.4.1. Геометрическая интерпретация соотношений для расчета элементов матрицы А.

в) А – положительно определенная матрица (т.е. А>0).

Запишем выражение для кинетической энергии ИМ:

$$KE = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(V_j^{(0)T} m_j V_j^{(0)} + \omega_j^{(0)T} I_j^{(0)} \omega_j^{(0)}) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{j}(c_k^{(0)\,T}\ I_j^{(0)} c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} m_j D_{jl}^{(0)}) q`_k q`_l.$$

Изменим порядок суммирования:

j = 1	k = 1	l = 1	->	k = 1,…,n
j = 2	k = 1,2	l = 1,2		l = k,…,n
j = 3	k = 1,2,3	l = 1,2,3		j = k (или l), т.е. = max(k,l)
…	…	…		
j = n	k = 1,2,3,…,n	l = 1,2,3,…,n		

$$KE = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=\max(k,l)}^{n}(c_k^{(0)\,T}\ I_j^{(0)} c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} m_j D_{jl}^{(0)})\, q`_k\, q`_l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, q`_k q`_l .$$

Таким образом, КЕ – квадратичная форма с матрицей А. По условиям физической реализуемости механической системы матрица квадратичной формы КЕ является положительно определенной. Поэтому А – положительно определенная матрица.

2.3. Свойства вектора b = {b_i}.

С учетом выражений для $c`^{(0)}_k$ *и* $\sum_{k=1}^{j} D`^{(0)}_{jk}\, q`_k$ *элемент* b_i *можно представить в виде*

$$b_i = \sum_{j=i}^{n} c_i^{(0)\,T} (I_j^{(0)} \sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\, c_k^{(0)} q_k` + \lambda(\omega_j^{(0)})\, I_j^{(0)}\, \omega_j^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(0)T} m_j\, (\, \lambda(\omega_j^{(0)})\, \lambda(\omega_j^{(0)})\, \tau_{0j}\, t_j \ +$$

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\, \lambda(\omega_k^{(0)})\, \tau_{0k}\, (v_k\,(1-\sigma_k) q_k \ + \ l_k) + 2\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\, \tau_{0k}\, (v_k\,(1-\sigma_k) q`_k) \ +$$

$$\lambda\,(\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k^{(0)})\, \tau_{0k} v_k \sigma_k q_k`\,)\, \tau_{0j} t_j + \sum_{l=1}^{j} \lambda\, (\sum_{k=1}^{l} \lambda(\omega_k^{(0)})\, \tau_{0k} v_k \sigma_k q_k`\,)\, \tau_{0l}\, (v_l\,(1-\sigma_l)\, q_l + l_l)).$$

Физический смысл b_i – сила или момент, воздействующие на оси шарниров при движении ИМ. Из представленного выражения видно, что b_i квадратично зависит от вторых производных обобщенных координат. Слагаемые, входящие в b_i представляют собой центробежные силы, моменты от действия этих сил, а также кориолисовы силы и моменты от действия сил Кориолиса.

2.4. Запись уравнений движения ИМ с использованием матриц преобразования между СК звеньев.

Выражения движения получены с использованием компонент, определенных в $СК_0$ ($I_k^{(0)}$, $c_j^{(0)}$, $D_{kj}^{(0)}$, и т.д.). На практике чаще бывает удобно записать уравнения движения ИМ с ипользованием компонент, заданных в СК звеньев (I_k, $c_j^{(k)}$, D_{kj}, и т.д.). Для этого преобразуем выразим $c_j^{(0)}$, $D_{kj}^{(0)}$ в системы координат, связанные со звеньями так $c_j^{(k)} = \tau_{k0}\, c_j^{(0)}$, $D_{kj}^{(k)} = \tau_{k0}\, D_{kj}^{(0)}$. Тогда, принимая во внимание, что

$$c_j^{(0)} = \tau_{0k}\, c_j^{(k)},\quad D_{kj}^{(0)} = \tau_{0k}\, D_{kj}^{(k)}\ ,$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j + b_i = \mu_{дi} + \sum_{j=i}^{n} c_i^{(j)\,T} M_{вj} + \sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{(j)T} F_{вj}\,,$$

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^{n} (c_i^{(k)\,T}\, \tau_{k0}\, I_k^{(0)} \tau_{0k}\, c_j^{(k)} + D_{ki}^{(k)T} \tau_{k0}\, m_k\, \tau_{0k} D^{(k)}{}_{kj});$$

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^{n} (c_i^{(k)\,T}\, I_k\, c_j^{(k)} + D_{ki}^{(k)T} m_k\, D^{(k)}{}_{kj})\ .$$

$$b_i = \sum_{j=i}^{n} c_i^{(j)\,T} (I_j \sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k)\, c_k\, \dot{q}_k + \lambda(\omega_j)\, I_j\, \omega_j) +$$

$$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{T} m_j\, \lambda(\omega_j)\, \lambda(\omega_j) t_j +$$

$$\sum_{j=i}^{n} D_{ji}^{T} m_j\, \tau_{jk} (\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k)\, \lambda(\omega_k)(v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + 2 \sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k)\,(v_k (1-\sigma_k)\dot{q}_k) +$$

$$\lambda (\sum_{k=1}^{j} \lambda(\omega_k)\, v_k\sigma_k\dot{q}_k)\, t_j + \sum_{l=1}^{j} \lambda (\sum_{k=1}^{l} \lambda(\omega_k)\, v_k\sigma_k\dot{q}_k)\, \tau_{kl} (v_l (1-\sigma_l)\, q_l + l_l)\ ).$$

Используется обозначение

$\tau_{k0}\ I_k^{(0)} \tau_{0k} = I_k$ – тензор инерции звена k, заданный в $СК_k$, совмещенной с центром масс этого же звена.

2.3. Пример расчета матрицы инерционных коэффициентов.